Héttusa megoldások, 2026. június

Dombi Péter

92. Lehetséges-e, hogy 13 egy síkban fekvő egyenesnek pontosan 44 metszéspontja legyen?

Megoldás. Igen, sok ilyen elrendezés van. Általános helyzetben a 13 egyenesnek 78 metszéspontja lenne. A metszéspontok számát azzal csökkenthetjük, ha bizonyos egyenesek *párhuzamosak*, illetve bizonyosak *egy ponton mennek át*. Jelöljük $\mathcal{P}_n$-nel, ha n párhuzamos egyenesünk van, $\mathcal{C}_m$-mel, ha m centrált, egy ponton átmenő egyenesünk van.

1. Tekintsük először a $\mathcal{C}_6+\mathcal{C}_7$ konfigurációt, azaz egy 6, illetve egy 7 egyenesből álló, egy ponton átmenő egyenesnyalábot (sugársort). Ezek általános helyzetben a két közös pont mellett további $6 \cdot 7 = 42$ metszéspontot adnak, tehát összesen 44-et.

2. Nézzük a $\mathcal{P}_8 + \mathcal{P}_4 + \mathcal{P}_1$ konfigurációt, itt csak a különböző irányú nyalábok egymás közötti metszéspontjait kell számolni, ami éppen $8 \cdot 4 + 8 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 44$.

3. Ha pedig a $\mathcal{C}_8 + \mathcal{P}_4 + \mathcal{P}_1$ konfigurációból indulunk ki, ott 1-gyel több, tehát 45 metszéspont lenne, de ezt azonnal csökkenthetjük is 1-gyel, ha a $\mathcal{C}_8$ valamelyik egyenesét a $\mathcal{P}_1$-vel párhuzamos irányúnak választjuk.

4. Vegyük a $\mathcal{P}_6 + \mathcal{P}_6 + \mathcal{P}_1$ konfigurációt. Általános helyzetben itt $6 \cdot 6 + 6 \cdot 1 + 6 \cdot 1 = 48$ metszéspont van, de ha a szóló egyenest a 6×6-os rács két „meglévő” rácspontján vezetjük át, akkor az érintett rácsponton az azokat létrehozó 2 egyenessel való metszéspontot nem kell újra számolni. Tehát minden rácsponton való áthaladás 2-vel csökkenti az általános helyzethez képesti metszéspontszámot, így ilyenkor $48 - 4 = 44$ metszéspont van.

5. Hasonló trükköt alkalmazhatunk egy $\mathcal{P}_5 + \mathcal{P}_6 + \mathcal{P}_2$ konfigurációnál, ahol kényszerfeltétel nélkül $5 \cdot 6 + 22 = 52$ metszéspont lenne. Itt az 5×6-os rács metszéspontjaiból 4-et kell a $\mathcal{P}_2$ családnak kiosztani, hiszen a már számolt rácspontok duplán csökkentik a metszéspontok számát. A 4 rácspont lehet a két egyenesen $4 + 0$, $3 + 1$, vagy $2 + 2$ megoszlásban. Mindhárom eset megvalósítható, ha a két párhuzamos nyaláb egyeneseinek távolságait megfelelően választjuk meg (és mindhárom különböző illeszkedésstruktúrát eredményez).

6. Apró változtatással kezelhetjük a $\mathcal{P}_5 + \mathcal{P}_6 + \mathcal{C}_2$ konfigurációt is. Itt az általános helyzet eggyel több, $5 \cdot 6 + 22 + 1 = 53$ metszéspontot jelent, de ha a $\mathcal{C}_2$ közös pontját az 5×6-os rács egyik rácspontjának választjuk, akkor egyrészt a páratlan összeget adó 1-es tagtól megszabadulunk, másrészt a $\mathcal{C}_2$ két egyenesére egyébként kívánkozó, 2-2 metszéspontból is 1-1-et letudhatunk, tehát elég $\mathcal{C}_2$ egyeneseit további 2 rácsponton keresztül vezetni $2 + 0$ vagy $1 + 1$ kiosztással (ez is két különböző illeszkedésstruktúra).

7. Nézzük a 4.-hez hasonló csoportosítású $\mathcal{C}_6 + \mathcal{C}_6 + \mathcal{P}_1$ elrendezést. Itt a $\mathcal{C}_6 + \mathcal{C}_6$ rész ad $36 + 2 = 38$ metszéspontot. Jelöljük a két hatos nyaláb egyeneseit $\{a_1, \ldots, a_6\}$-tal és $\{b_1, \ldots, b_6\}$-tal, és válasszuk őket úgy, hogy három párnak a metszéspontja, pl. $a_1 \cap b_1$, $a_2 \cap b_2$ és $a_3 \cap b_3$ kollineáris legyen. Szemléletesen lehet ez a 3 metszéspont a két hatos sor tartóját összekötő szakasz felezőmerőlegesén, azaz választhatjuk a 3 egyenespárt tengelyesen tükrös helyzetűnek, a többit pedig egymáshoz és ehhez a tengelyhez képest is általános helyzetűnek. Ezek után a 13. egyenes legyen ez a tükörtengely, így a rá illeszkedő 3 metszéspont éppen 6-tal csökkenti a $38 + 12 = 50$ metszéspontot.

8. Tekintsünk a $\mathcal{C}_7 + \mathcal{P}_5 + \mathcal{P}_1$ konfigurációt a $\mathcal{C}_7 + \mathcal{P}_5$ „vegyes rács”-ból kiindulva. A 4.-hez hasonlóan itt is általánosan $35+1+12 = 48$ metszéspont van, ezért a $\mathcal{P}_1$ egyenest úgy kell meghúzni, hogy a metszéspontok száma 4-gyel csökkenjen, azaz hogy a $\mathcal{P}_1$ egyenes pontosan két „rácsponton” menjen át (ez persze megvalósítható). Érdemes megjegyezni, hogy a $\mathcal{P}_7 + \mathcal{C}_5 + \mathcal{P}_1$ konfigurációnál a szóló egyenesre ugyanilyen megkötés egy másik illeszkedésstruktúrát eredményez.

9. Kiindulhatunk a $\mathcal{C}_7 + \mathcal{P}_3 + \mathcal{P}_3$ konfigurációból, ahol általános helyzetben a metszéspontok száma $1 + 21 + 21 + 9 = 52$. Ezt épp 8-cal fogja csökkenteni, ha a $\mathcal{C}_7$ sugársor néhány egyenese a 3×3-as rácsnak 4 rácspontján átmegy. A 4 rácspont lehet az egyeneseken (1+1+1+1), (1+1+2), (1+3), (2+2) megoszlásban is. Sőt, a 4 rácspontot választhattuk volna a 7×3-as „rácson", és azokat a másik $\mathcal{P}_3$ nyaláb egyeneseire oszthatnánk, ami újabb megfelelő szerkezetekhez vezethet.

10. Egy másik, termékeny konstrukció lehet a 3.-nál használt ötlet kiterjesztése. Tekintsük a $\mathcal{C}_4 + \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_7$ elrendezést, aminél 1+8+28+14=51 metszés van, és válasszuk a $\mathcal{C}_4$ sugársor egyik elemét a $\mathcal{P}_7$ párhuzamos nyalábbal azonos irányúnak. Ezzel éppen 7 metszéspontot vesztünk, tehát 44-et kapunk.

Ezt az elvet, amikor a sugársor bizonyos egyeneseit egy vagy több párhuzamos nyaláb irányában választjuk, és ezzel az általános metszéspontszámot éppen az adott nyaláb(ok) elemszámával csökkentjük, még 6 másik felosztásnál is alkalmazhatjuk:

$\mathcal{C}_3 + \mathcal{P}_7 + \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_1 \quad (44 = 54 - 7 - 2 - 1)$
$\mathcal{C}_4 + \mathcal{P}_8 + \mathcal{P}_1 \quad (44 = 45 - 1)$
$\mathcal{C}_4 + \mathcal{P}_7 + \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_1 \quad (44 = 52 - 7 - 1)$
$\mathcal{C}_8 + \mathcal{P}_3 + \mathcal{P}_2 \quad (44 = 47 - 3)$
$\mathcal{C}_8 + \mathcal{P}_3 + \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_1 \quad (44 = 48 - 3 - 1)$
$\mathcal{C}_8 + \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_1 \quad (44 = 49 - 2 - 2 - 1)$

93. Egy számsorozatban az első elem egy pozitív egész szám. A sorozat újabb elemét úgy kapjuk, hogy az utoljára leírt számhoz hozzáadjuk a szám legnagyobb számjegyét. Ha 13 az első elem, akkor a sorozat 13, 16, 22, 24, 28, 36, ... Egy ilyen sorozatban legfeljebb hány páratlan szám sorakozhat egymás után?

Megoldás. Legfeljebb öt páratlan szám állhat egymás után. Legyen a sorozatban öt egymás utáni páratlan elem $p_1, \ldots, p_5$, ezekben a legnagyobb számjegy rendre $d_1, \ldots, d_5$. Ekkor először is a paritás változatlansága miatt a d_i jegyek párosak, ha $1 \le i \le 4$, így az első négy tagnál d_i biztosan nem az utolsó jegy. Mivel páros d_i-re $d_i < 9$, ezért az $i+1$-edik tag képzésénél semelyik – egyesektől különböző helyen – nem csökkenhet számjegy, hisz ahhoz 9-es jegy kellene, ami nincs. Tehát $d_i \le d_{i+1}$ $(1 \le i \le 4)$. De $d_i < d_{i+1}$ nem lehet, mert ahhoz valamelyik (nem az egyesek helyén levő) számjegynek legalább 2-vel kellene nőnie, ami lehetetlen. Tehát

$$d_i = d_{i+1} \qquad (1 \le i \le 4).$$

Emiatt $p_1, \ldots, p_5$ számtani sorozat, így mind az öt páratlan végződés különböző (Bizonyítás: $10|kd$ és $(5, d) = 1 \Rightarrow 5|k$). Így $d_i < 9$ miatt az öt különböző végződés közül a 9-es nem lehet előbb, mint az ötödik szám végződése. Mivel a közbülső p_i számok valamelyike viszont 7-re végződik, ezért a konstans páros $d_i\,(= d)$ differencia 7-nél nagyobb kell legyen, tehát $d = 8$. Ennek ismeretében már visszafelé haladva 9, 1, 3, 5, 7 lesz az öt végződés. Ilyen sorozat például a

$$807, \quad 815, \quad 823, \quad 831, \quad 839,$$

vagy bármilyen más, $\ldots 8 \ldots 07$ kezdetű és 9-es jegy nélküli ötös.

Érdekes viszont, hogy minden sorozat, bármilyen kezdőtaggal indítva végtelen sokszor tartalmaz ilyen 5 hosszúságú, csupa páratlan számokból álló futamot. Elég ezt az egyjegyű, $1 \le j \le 9$ kezdőtagokra igazolni, mert amikor a sorozat először átlép egy 10-hatványt, akkor az első $10^k + j'$ alakú tagjától kezdve „elegendően sokáig" egy esetleg másik, $1 \le j' \le 9$-ből induló sorozat jelenik meg 10^k-val eltolva, hisz az $10 \ldots 0$ kezdőszelet számjegyei nem változtatják meg a legnagyobb számjegyet.

Viszonylag kevés számolással láthatjuk, hogy minden $j <$ 10-ből induló sorozat 101-nél lépi át a 100-at. Valóban, $j = 1, 2, 4, 8$ esetén:

$$1, 2, 4, 8, 16, 22, 24, 28, 36, 42, 46, 52, 57, 64, 70, 77, 84, 92, 101$$

a többi j-re pedig hamar közös ágra, a 18-ba jutunk: $(3, 6, 9, 18)$, $(5, 10, 11, 12, 14, 18)$, $(7, 14, 18)$. Innen pedig

$$18, 26, 32, 35, 40, 44, 48, 56, 62, 68, 76, 83, 91, 100, 101.$$

101-től már kézi számolással hosszú lenne a folytatás, de a

```
=MAX(KÖZÉP(A1;SOR(INDIREKT("1:"&HOSSZ(A1)));1)*1)
```

Excel-képlet segítségével hamar kijön, hogy 1161 további lépés után megjelenik a 7807, illetve onnantól az öt páratlan tagból álló futam. Mivel a 101, és így a 7807 is minden egyjegyű induló értékből előáll, ezért a 10^k $(k > 3)$ elérését követően ezer-egynéhány lépés után mindig kapunk egy 7807-es végződéssel kezdődő páratlan ötöst.

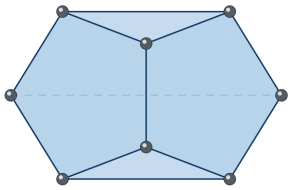
* * *

Sok hasonló kérdés is felvethető a sorozattal kapcsolatban, akár későbbi Héttusa-fordulókban:

1. Milyen hosszú a leghosszabb, páros számokból álló futam? Van-e minden sorozatban ilyen hosszú, tiszta páros rész? (Ez lenne a természetes ikertestvér-feladat, és kb. ugyanolyan nehéz, mint a páratlan eset.)
2. Milyen hosszú a leghosszabb, 3-mal osztható számokból álló futam? Van-e minden sorozatban ilyen maximális futam? (Ez a 9 számjegy miatt lehet izgalmas. És kérdés, hogy egyáltalán korlátosak-e a futamhosszak. A többi kongruenciánál sem mindig nyilvánvaló.)
3. Milyen hosszú a leghosszabb, 3-mal nem osztható számokból álló futam? Van-e minden sorozatban ilyen maximális futam?
4. Milyen hosszú a leghosszabb, 5-tel osztható számokból álló futam? Van-e minden sorozatban ilyen maximális futam?
5. Milyen hosszú a leghosszabb, 5-tel nem osztható számokból álló futam? Van-e minden sorozatban ilyen maximális futam?
6. Milyen hosszú a leghosszabb, 7-tel osztható számokból álló futam? Van-e minden sorozatban ilyen maximális futam? (Héttusa-barát kérdés)
7. Milyen hosszú a leghosszabb, 7-tel nem osztható számokból álló futam? Van-e minden sorozatban ilyen maximális futam? (Ez nehéznek látszik)
8. Van-e mindig végtelen sok szomszédos számpár a sorozatban?
9. Van-e mindig végtelen sok ikerpár (2-különbségű szomszédos tag) a sorozatban?

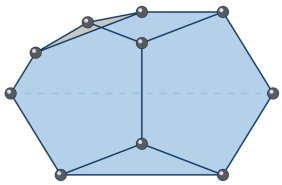
94. Legkevesebb hány csúcsa lehet annak a poliédernek, amelynek nincs három, ugyanannyi éllel határolt lapja?

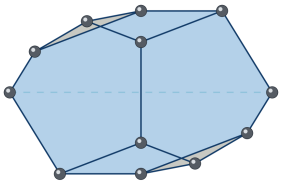
Megoldás. Tekintsük a szabályos dodekaéder két szomszédos ötszöglapján levő 8 csúcs konvex burkát. Ennek a testnek 2 háromszög-, 2 négyszög- és 2 ötszöglapja van.

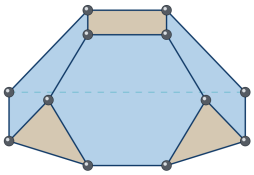


Még három másik test is rendelkezik hasonló tulajdonsággal. Ezekből kettőt úgy kapunk, hogy a fenti 8 csúcsú test egy vagy két csúcsát levágjuk. Annál a csúcsnál kell vágni, amelyiknél a 3-, 4- és 5-szög lap találkozik, mert a csonkolás eggyel el fogja tolni az oldalszámokat: a 3-szöglapból 4-szög, a 4-szögből 5-szög, az 5-szögből 6-szög lesz, így nyerünk egy hatszöget, és a vágósík hozza vissza a vágással elrontott 3-szöglapot (bal oldali ábra). Ennek a testnek 10 csúcsa és 7 lapja van. Az előző vágással nem érintett oldallapok találkozásánál is levághatjuk a szemköztes csúcsot, ezzel kapunk egy második hatszöglapot (középső ábra). Ennek a testnek 12 csúcsa és 8 lapja van.

Van egy másik, ugyancsak 12 csúcsú megfelelő test, ez a négyzet alapú gúla csúcsának, illetve az alaplap két szomszédos sarkának levágásával keletkezik (jobb oldali ábra). Az így kapott test más szerkezetű, mint az előző, hiszen ennél a 4-szöglapok szomszédosak, az 5-szöglapok nem, míg a középső ábrán látható testen éppen fordítva, az 5-szöglapok szomszédosak és a 4-szöglapok nem.







8-nál kevesebb csúcsú test nem lehet jó. Ha V, E, F jelöli a csúcsok, élek, lapok számát, akkor $V = 5$ csak két poliédert enged, mindkettőben 3-nál több háromszög van.

A csúcsok fokszámösszege $2E$, és minden csúcsba legalább 3 él fut, tehát $2E \geq 3V$, azaz $E \geq \frac{3}{2}V$, amit az Euler-képletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy $F + V = E + 2 \geq \frac{3}{2}V + 2$, azaz $F \geq \frac{1}{2}V + 2$.

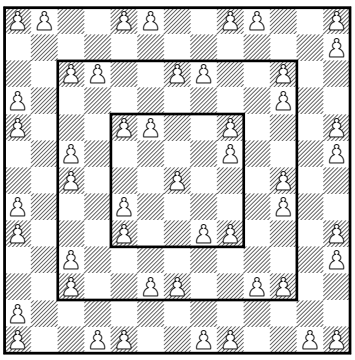
Ha $V = 6$, akkor az előző képlet miatt legalább 5 lapja lenne a testnek, és ötszöglapja biztosan nincs, hiszen akkor gúla lenne. Ezért csak háromszög- és négyszöglapok lehetnének, valamelyikből tehát 2-nél több.

Ha $V = 7$, akkor a fenti képlet $F \geq 6$-ot ad. Itt most hatszöglap nem lehet, tehát a feltétel miatt kényszerűen 2 háromszög, 2 négyszög és 2 ötszöglap van. Ekkor viszont $F = 6$, továbbá az élek száma pontosan $2(3 + 4 + 5)/2 = 12$ lenne, ami ellentmondana az $F + V = 13$ értéknek.

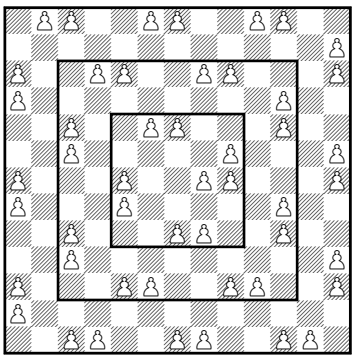
95. Egy 5×5-ös tábla mindegyik mezőjén áll egy bábu. Most mindegyik bábuval valamelyik vele oldalszomszédos mezőre lépünk. Legfeljebb hány üres mező maradhat ezután?

Megoldás. Legfeljebb 16. Másképp nézve, a táblán legalább 9 mező mindig foglalt lesz. Belátjuk, hogy általánosabban, páratlan oldalhosszúságú négyzetes táblán az ellépések után a foglalt mezők minimális száma

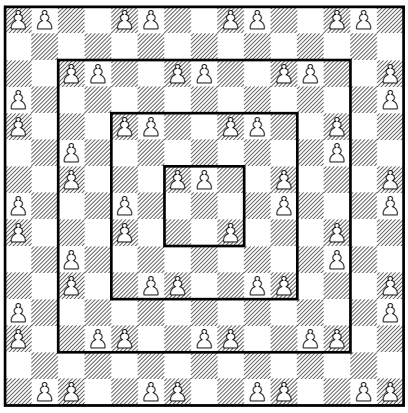
$$c_m = \begin{cases} (2k+1)^2, & \text{ha } m = 4k+1; \\ (2k+2)^2 - 1, & \text{ha } m = 4k+3. \end{cases}$$



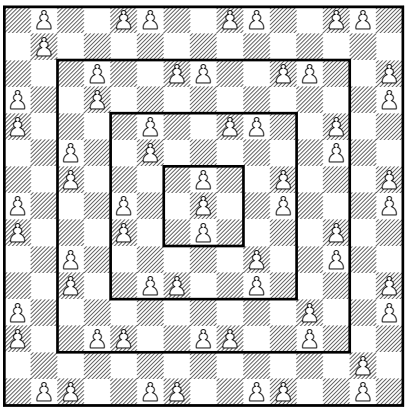
1. ábra. Független mezők ($m = 4k + 1$)



2. ábra. Lefogó mezők ($m = 4k + 1$)



3. ábra. Független mezők ($m = 4k + 3$)



4. ábra. Lefogó mezők ($m = 4k + 3$)

Tekintsük a bal oldali ábrákat. A bal felső sarokból a tábla szélén haladva felváltva két mezőre bábut helyezünk, kettőt üresen hagyunk. Ugyanezt ismételjük a 4-gyel kisebb belső táblarészen, majd befelé ugyanígy haladunk, amíg a tábla közepéhez nem érünk (a 3×3-as magot csak hiányosan lehet körbejárni). Egyszerűen végignézhető, hogy a bábuk helyzete olyan, hogy *semelyik kettőhöz nem található közös (oldal)szomszédos mező*, ebben az értelemben ezeket a mezőket *függetleneknek* nevezzük. A résztáblák szegélye mentén a lépésköz, két koncentrikus gyűrű bábui közt pedig az eltolás biztosítja ezt a tulajdonságot. *Ezek a bábuk* tehát, amikor ellépnek a mezőjükről, biztos, hogy *páronként különböző mezőre fognak lépni*, tehát annyi mező biztosan foglalt lesz, ahány független bábut elhelyezhetünk a táblán.

A jobb oldali ábrák az egész táblát *lefogó* bábuhalmazt mutatnak, azaz olyan halmazt, amelyben bármelyik táblamezőhöz található legalább egy szomszédos bábu. A megoldás szempontjából ez is egy alapvető tulajdonság, hiszen az ellépések után elfoglalt mezők lefogó halmazt alkotnak. Mind a $4k + 1$, mind a $4k + 3$ oldalhosszúságú táblák esetén az, hogy a halmaz az egész táblát lefogja, a résztáblák gyűrűin keresztülhaladva egyszerűen belátható. A bábupárok („dominók") haladása itt nem tetszőleges, azt a legbelső 5×5, illetve 3×3 rész kényszerítette ki. Figyeljük meg, hogy a jobb és bal oldali ábrákon eltérő helyzetben ugyan, de azonos számú dominó, és így természetesen azonos számú bábu van.

Független bábu legfeljebb annyi lehet, ahány elemű egy lefogó halmaz, hiszen ellenkező esetben a skatulya-elv miatt valamelyik lefogó bábura több független bábu jutna. Azoknak ez a lefogó egy közös szomszédja lenne, ami a függetlenségnek ellentmond. Mivel mindkét esetben találtunk egy független halmazzal azonos elemszámú lefogó rendszert, ezért ezek a lefogó halmazok szükségképpen minimálisak (a talált független halmazok pedig maximálisak). Ez egyúttal azt jelenti, hogy közös elemszámuknál kevesebb helyre nem lehetséges az ellépő bábukat irányítani, más szóval, az ellépések után legalább ennyi foglalt mező lesz.

Végül már csak meg kell számolnunk a lefogó (vagy a független) halmazt. Egy-egy lépésben a négyzetoldal 4-gyel, a kerület 16-tal nő, és mivel a szegély melletti mezőknek pontosan fele foglalt, így minden újabb gyűrű 8-cal növeli a bábuk számát. Tehát ha c_m jelöli a minimális lefogó halmaz elemszámát, akkor

$$c_{4k+1} = 1 + 8(1 + 2 + \ldots + k) = (2k + 1)^2.$$

Az $m = 4k+3$ eset hasonló, csak a nem teljes belső kör miatt kicsit másképp kell számolni. Nyilván $c_3 = 3$. $k > 0$ esetén

$$c_{4k+3} = 3 + 4(3 + 5 + \ldots + 2k + 1) = -1 + 4(1 + 3 + 5 + \ldots + 2k + 1) = (2k + 2)^2 - 1$$

A feladat tökéletes ikerpárja a korábbi, 45. Héttusa-feladatnak. Az általános eset képlete is teljesen azonos azzal, amit ott levezettem:

$$c_m = \begin{cases} \left\lfloor \frac{(m+1)^2}{4} \right\rfloor - 1, & \text{ha } m \equiv 3 \pmod 4 \\ \left\lfloor \frac{(m+1)^2}{4} \right\rfloor, & \text{egyébként} \end{cases}$$

A képletben az $m = 4k + 3$ eset egyetlen mezőnyi deficitje a 3. ábra 3×3-as közepénél említett féldominós „megbicsaklást” tükrözi.

96. A 2, 3, 4, …, n számokat pirossal és kékkel színezzük úgy, hogy ha két szám azonos színű, akkor a szorzatuk a másik színű legyen. (A két szám lehet ugyanaz is: ha például 2 kék, akkor $2 \times 2 = 4$ piros.) Mekkora lehet n legnagyobb értéke?

Megoldás. 31-ig van jó színezés, később nincs. Az egyszerűbbnek ígérkező additív változattal érdemes kezdeni. *Ott csak négyig juthatunk,* mert az 1 és a 2 (1+1=2), valamint a 2 és a 4 (2+2=4) különböző színűek lesznek, így $1 \equiv 4$ miatt 3-at a másik osztályba kell tenni, tehát $2 \equiv 3$. Ekkor az 5 már egyik osztályba sem kerülhet.

Rátérve a feladat kérdésére, 32-ig biztos nem juthatunk, hiszen az első öt 2-hatvány a fenti észrevétel miatt a kitevőket nézve valahol elrontaná az osztályozást. 31-ig a színezés – ismét az előző bekezdésre hivatkozva – a következő lehet: ha a nem feltétlenül különböző prímosztók száma 1 vagy 4, akkor a szám piros lesz, ha 2 vagy 3, akkor kék. Ez a csoportosítás 31-ig vihető, a prímeken kívül a 16 és a 24 lesz piros.

97. Egy 20 cm hosszú pálcát olyan darabokra törtünk, amelyek hossza egész számú centiméter. Mi a legkisebb darabszám, amelyre biztosan igaz, hogy az összes darabból – bármekkorák is a darabok – kirakható egy téglalap?

Megoldás. 12 résznél biztosan sikerül, kevesebbnél nem mindig. Általánosan,

Egy $2n$ hosszú pálcát legalább $n+2$, egész hosszúságú részre kell törni, ezekből kirakható valamilyen téglalap, kevesebből nem mindig.

Kezdjük az utóbbival, mert egyszerűbb. Ha legfeljebb $n+1$ rész engedélyezett, akkor legyen *egy kivétellel az összes* rész 1. Így az egységnyi részek száma legfeljebb n, ezért az egyetlen nagy rész hossza legalább a félkerület lenne, és az kizárná a téglalap összeállítását.

Most belátjuk, hogy $n+2$ rész már elegendő. Indukcióval bizonyítunk, $n=2$-re az állítás triviális. Tegyük fel, hogy n-nél kisebb értékekre igaz, és tekintsük $S=2n$-nek egy tetszőleges, $n+2$ egész tagból álló felbontását. Jelöljük m-mel az egységnyi részek számát, ekkor

$$m+2(n+2-m)\le 2n$$

miatt látható, hogy $m\ge 4$. Másik oldalról feltehetjük, hogy $m\le n$, mert ellenkező esetben egyszerűen az egyetlen nagy pálcadarab a félkerületnél kisebb, így választható a téglalap egyik oldalának, a szemközti és a másik két oldal pedig a maradék egyesekkel kirakható. Az $m\le n$ úgy is olvasható, hogy az egységnyinél hosszabb darabok (továbbiakban nagy tagok) száma legalább 2.

Megmutatjuk, hogy van két nagy tag, amiknek a különbsége kisebb, mint m. A legkisebb nagy tag legalább 2, a legnagyobb nagy tag pedig legfeljebb $2n-m-2$ (a nagy tagok összege mínusz a legkisebb nagy tag). Osszuk fel a két szélső nagy tag távolságát a *számuk mínusz 1,* azaz $n+2-m-1$ egyenlő részre, ekkor valamelyik részintervallumba két nagy tag kerül. Ezek különbsége megfelelő lesz, ha teljesül, hogy

$$\frac{2n-m-4}{n-m+1}<m\,.$$

Átszorozva

$$2n-m-4<nm-m^2+m$$

és rendezve

$$m(m-2)-4<n(m-2)\,,$$

végül

$$-4<(n-m)(m-2)\,,$$

ami igaz, hisz a jobb oldali két tényező nemnegatív.

Kaptuk tehát, hogy van olyan $a\ge b$ nagy tag, amelyre $a-b<m$. Hagyjuk el a részek közül a-t, b-t és $d=a-b$ darab egységnyi részt. Ekkor a részek száma $d+2$-vel csökken, az összhosszúság pedig $2a$-val. Mivel $b\ge 2$, ezért $a=d+b\ge d+2$, tehát $2a\ge 2(d+2)$ – az elhagyott összhossz legalább annyi, mint az elhagyott részek számának duplája –, ezért az elhagyás után alkalmazhatjuk az indukciós feltevést. A maradék részekből kirakjuk a téglalapot, majd két szemköztes oldal egyikéhez hozzávesszük a-t, a másikához pedig b-t és a d darab egységnyit.

Mivel az indukció nem triviális kezdő helyzetből indult, meg kell nézni, hogy az elhagyás után nem maradt-e elfajult helyzet. Mivel $a-b$ határozottan kisebb, mint m, ezért legalább 1 egységnyi rész maradt. A maradék összhosszúság páros ($2n-2a$), tehát az egységnyi részen kívül maradt más tag is.

- Ha az egységnyi darabon kívül nagy tag is maradt, akkor a maradék összhossz biztosan nagyobb, mint 2, tehát nem elfajult helyzet, így az indukciós lépés valóban megtehető.
- Ha nincs más maradvány, csak két egységnyi darab, akkor a téglalap oldalai legyenek a, $b+d\times 1$, 1, 1.

98. Felföldön a totó csak négy mérkőzést tartalmaz. Minden mérkőzés eredményére háromféleképpen lehet tippelni: 1, 2 vagy X (a hazai csapat nyer, a vendégcsapat nyer, vagy döntetlen lesz az eredmény). Egy szelvényen csak egy tipposzlop van. Hány totószelvényt kell kitöltenünk ahhoz, hogy bármilyen eredménnyel záruljon is a négy mérkőzés, legyen közöttük legalább egy legalább háromtalálatos?

Megoldás. 9 szelvény elég. Módosítsuk a döntetlen jelét 0-ra, a négy tippet jelöljük x_1-gyel, …, x_4-gyel. A szisztémánk az lesz, hogy x_3 és x_4 értékét mind a 9 lehetséges módon felvesszük, és az x_1 és x_2 tippet ezekből mint 3-as maradékosztályokból számítjuk ki úgy, hogy

$$x_1 = x_3 + x_4, \qquad x_2 = x_3 - x_4$$

A kilenc szelvény tehát:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

A fenti szelvények rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy semelyik szelvénypáron nincsen két mérkőzés ugyanolyan tippel. Ez abból következik, hogy akármelyik két koordináta értékét ismerjük, abból a másik kettő egyértelműen meghatározható. Tehát nincs olyan kimenetele a fordulónak, aminél két különböző szelvényen is lenne legalább három találat. Ugyanis ha például az egyik szelvényen csak az első, a másikon csak a negyedik mérkőzést hibázzuk el, akkor a maradék két (2. és 3.) mérkőzést már jól kellene tippelni, de ez lehetetlen, mert két helyen egyezés nincs a szelvények között.

Minden szelvényhez $2 \cdot 4 + 1 = 9$ olyan kimenetel tartozik, amelynél a szelvénynek legfeljebb 1 hibája, azaz legalább három találata van. Tehát a 9 szelvényhez $9 \cdot 9 = 81$ kimenetel tartozik, és ezek mind különbözők, emiatt a forduló összes kimenetelét lefedtük ezzel a 9 szelvénnyel.

Ugyanezért ezt 8 szelvénnyel nem lehet megoldani, mert azzal csak $8 \cdot 9 = 72$ kimenetelt lehet lefedni.

* * *

Az Alföldön, ahol a 13-as totót játsszák, szintén létezik hasonló perfekt módszer. Itt 10 koordinátát választunk szabadon, tehát x_4, x_5, …, x_{13} tippeket választjuk meg az összes lehetséges módon, és az x_1, x_2, x_3 koordináták lesznek ezek alkalmas lineáris függvényei. Ebben a játékban tehát $3^{10} = 59049$ szelvény biztosít 12 találatot.

A három egyenlet

$$\begin{aligned} x_1 &= x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} \\ x_2 &= x_4 + 2x_5 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + 2x_{12} + 2x_{13} \\ x_3 &= x_6 + 2x_7 + x_8 + 2x_9 + x_{10} + 2x_{11} + x_{12} + 2x_{13}\,, \end{aligned}$$

illetve mátrixalakban

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} (x_4\ x_5\ x_6\ x_7\ x_8\ x_9\ x_{10}\ x_{11}\ x_{12}\ x_{13})^T. \qquad (1)$$

Itt is először azt érdemes ellenőrizni, hogy 2 híján a többi 11 eredmény egyértelműen meghatározza-e valamelyik szelvényt, vagy, a linearitás miatt tömörebben, ha egy kódszó (szelvény) valamelyik 11 koordinátája 0, akkor az összes 0. Ez világos, ha a 11-ből 10 szabad koordináta 0, és akkor is, ha 9 szabad tipp és 2 függő egyenlet 0. Az érdekes eset az, amikor 8 szabad változónk és 3 egyenletünk 0. Ha két szabad változó, például x_i és x_j kivételével minden szabad változó 0, akkor az egyenletrendszer a következővé egyszerűsödik

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i & x_j \end{pmatrix}^T . \qquad (2)$$

ahol a mátrix két oszlopa az eredeti egyenletrendszer x_i és x_j együtthatóiból öröklődött. Világos, hogy az így előállt (2) egyenlet akkor adja egyedül az $x_i = x_j = 0$ megoldást, ha a mátrixnak ez a két oszlopa lineárisan független. Pontosan ez a szempont vezette az (1) egyenlet mátrixának felírását, hogy az oszlopok a három egységvektorral kiegészítve *páronként lineárisan függetlenek* legyenek a 3-as maradékosztályok teste felett.

A megjátszott 3^{10} szelvény mindegyike $2 \cdot 13 + 1 = 27$ kimenetelt fog le. Különböző szelvények nem nyerhetnek egyszerre, mivel egy olyan kimenetel mellett a két nyerő szelvény legfeljebb 2 helyen (ahol valamelyik hibázott) térhetne el egymástól, ez pedig ezekkel a kódszavakkal, láttuk, nem lehetséges. Ezért a $3^{10} \cdot 27 = 3^{13}$ kimenetel mindegyike valamelyik megjátszott szelvényünkhöz (a „nyerőhöz") fog tartozni. Kevesebb szelvény itt sem elég, mert 1 szelvény csak $2 \cdot 13 + 1 = 27$ kimenetelt tud lefogni, ezért szükség van legalább $3^{13}/27 = 3^{10}$ szelvényre.