

Héttusa megoldások, 2026. június

Dombi Péter

85. Egy kört 14 ponttal egyenlő ívekre osztottunk. Ezek a pontok párosával összeköthetők-e 7 db különböző hosszúságú húrral?

Megoldás. Nem. Tegyük fel, hogy egy szabályos $2m$ szög csúcsait párokba lehet állítani különböző hosszúságú húrokkal. Ekkor a húrok összhossza miatt a párokra teljesülni kell az

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \dots + (a_m - b_m) = 1 + 2 + \dots + m$$

összefüggésnek, hiszen a bal oldali különbségek minden 1 és m közötti értéket kiadnak valamilyen sorrendben. Mivel a bal oldalon minden $[1, 2m]$ intervallumba eső egész előfordul, és az összeg paritásán nem változtat, ha a negatív előjeleket megfordítjuk, ezért az is teljesül, hogy

$$(a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \dots + a_m + b_m) = 1 + 2 + \dots + 2m \equiv 1 + 2 + \dots + m \pmod{2}.$$

A két oldal különbségét véve

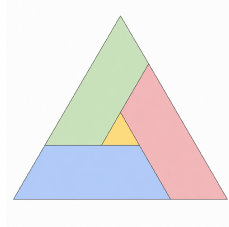
$$(m + 1) + (m + 2) + \dots + (m + m - 1) + (m + m) \equiv 0 \pmod{2}.$$

Az utolsó tag elhagyható, a maradék rész $(m - 1)m + 1 + 2 + \dots + (m - 1)$ alakra hozható. Ebben az $(m - 1)m$ rész mindig páros, tehát elhagyható, így azt kapjuk, hogy $1 + 2 + \dots + (m - 1) = m(m - 1)/2$ páros, ami csak $m = 4k$ és $m = 4k + 1$ esetén teljesülhet. Mivel a feladatban $m = 7$ szerepelt, ezért arra nincs megoldás.

Általánosabban, egy szabályos $2m$ szög csúcsait csak akkor lehet párokba állítani különböző hosszúságú húrokkal, ha $m = 4k$, vagy $m = 4k + 1$. Be lehet bizonyítani, hogy ez a feltétel elégséges is.

86. Felföldön a királyság térképén minden tartomány konvex alakú. Biztos-e, hogy a térkép kiszínezhető 3 színnel úgy, hogy a közös határú tartományok színe különböző?

Megoldás. Nem biztos. Ezen a térképen bármelyik két országnak van közös határa, ezért mind a négynek más színt kell választani:



87. Készítünk egy egész számokból álló sorozatot, a kiinduló szám a 13. A sorozatban a következő számot mindig úgy kapjuk, hogy a legutóbbi számhoz vagy 9-et adunk, vagy ha van, letöröljük a szám egyik 1-es számjegyét, és ha egy ilyen törlés után a szám elején néhány nulla áll, azokat is töröljük. Megkaphatjuk-e a 137-et egy ilyen sorozatban?

1) Ha a két művelet (9-cel növelés, vagy 1-es törlés) minden lépésben szabadon választható, akkor a 137 előállítható:

$$13 \longrightarrow 3 \longrightarrow 12 \longrightarrow 2 \xrightarrow{+9} 11 \xrightarrow{+9} 20 \xrightarrow{+9} \dots \xrightarrow{+9} 128 \xrightarrow{+9} 137.$$

Ilyen értelmezés mellett *bármelyik természetes számból előállítható bármelyik másik természetes szám*. Ha a kiinduló szám k jegyű, akkor először sorozatos $x + 9$ művelettel elérünk egy $10^k + r$ alakú számhoz ($1 \leq r \leq 9$), majd ebből törléssel magához az r maradékhoz. Ezután r -ből az

$$1 \rightarrow 10 \rightarrow 19 \rightarrow 9 \rightarrow 18 \rightarrow 8 \rightarrow 17 \rightarrow 7 \rightarrow \dots \rightarrow 12 \rightarrow 2 \rightarrow 11 \rightarrow 1$$

ciklus megfelelő részével megkapjuk az előállítandó szám 9-es maradékát, abból pedig ismételt $x + 9$ művelettel eljutunk az előállítandó számhoz.

2) Ha az 1-est minden alkalommal kötelező törölni, akkor nem áll elő a 137, ciklusban ismétlődik a sorozat:

$$13 \rightarrow 3 \rightarrow 12 \rightarrow 2 \rightarrow 11 \rightarrow 0 \rightarrow 9 \rightarrow 18 \rightarrow 8 \rightarrow 17 \rightarrow 7 \rightarrow \dots \rightarrow 14 \rightarrow 4 \rightarrow 13.$$

88. Bence választott néhány egymást követő pozitív egész számot, és ezeket valamilyen sorrendben leírta egymás után. Ezután kiszámolta a szomszédos számpárok legnagyobb közös osztóját, és csupa különböző számot kapott. Legfeljebb hány számot választhat Bence?

Megoldás. Ezt legfeljebb öt számmal teheti meg, pl. így: 10, 8, 12, 9, 11. vagy hasonlóan, végtelen sok másik ötössel: $12k - 2, 12k - 4, 12k, 12k - 3, 12k - 1$. Belátjuk, hogy ötnél több szomszédos számmal ilyen sorrend nem létezik. Legyenek a számok

$$m, m + 1, \dots, m + n - 1.$$

(1) Két szám legnagyobb közös osztója (lko) osztója a különbségnek, ezért esetünkben mindegyik lko legfeljebb $n - 1$. De $n - 1$ szomszédos pár van, ezért, ha mind különböző, akkor *az lko-k éppen az $1, 2, \dots, n - 1$ számok*.

(2) Jó sorrendben *a páros számoknak egymás mellé kell kerülniük*. Ugyanis az lko-k között $k = \lfloor n/2 \rfloor$ páros szám van, ezek csak páros számok között léphetnek fel. De kiválasztott páros szám is ugyanennyi, vagy eggyel több van, így ha a szomszédos helyre kerülő számpároknak gráfeket feleltetünk meg, akkor a páros számok részgráfiájában k élünk és legfeljebb $k + 1$ csúcsunk van, a körmentesség miatt ebből már következik (c komponensből álló erdőnek $k + 1 - c$ éle van, így $c = 1$), hogy ez a rész maga is egy egyszerű út, „lánc”.

(3) *Nagy páratlan lko csak páros-páratlan számpárnál léphet fel.* Ez egyből látszik akkor, ha $d > (n - 1)/2$, hiszen ilyen d -nek csak két többszöröse fordulhat elő a számaink között, és két egymás utáni többszörös közül az egyik páros, a másik páratlan. Ez a megfigyelés tovább javítható az $(n - 1)/2 \geq d > (n - 1)/3$ esetekre is. hiszen ilyen d -nek legfeljebb három többszöröse fordulhat elő a számaink között, viszont $2d$ maga is fellép lko-ként két páros szám között, ezért ha két páratlan szám lko-ja d lenne, az a páros többszörösökkel együtt már négy többszöröst jelentene. Vagyis d ismét csak páros-páratlan számpár lko-ja lehet. Nagy páratlan lko csak a páros számok láncának két szélén csatlakozhat páratlan számhoz, ezért *legfeljebb két páratlan $n - 1 \geq d > (n - 1)/3$ lehet*.

(4) *Ha $n > 7$, akkor legalább három nagy páratlan lko van,* tehát a kért sorrend nem létezhet. Mert ha $n = 8$, akkor 3, 5, 7 megfelelők, ha $n > 8$, akkor az $(n - 1)/3 < d \leq n - 1$ intervallum hossza $\frac{2}{3}(n - 1) \geq 5$, és 5 hosszú intervallumban mindig van 3 páratlan egész.

(4) *Az $n = 7$ eset.* Ekkor a $d = 6$ a legnagyobb és legkisebb szám között léphet fel, ez a két 6-tal osztható szám tehát egymás mellé kerülne, tehát valamelyikük a párosokból álló lánc első eleme, így ahhoz páratlan lko nem tartozhat. A másik 6-tal oszthatóhoz kellene tartozni egyrészt a 3-mal osztható páratlan elemnek ($d = 3$), másrészt az 5-tel osztható páratlan elemnek (mivel $d = 5$ -ös különbség csak a legnagyobb vagy a legkisebb számnál léphet fel). Tehát vagy $d = 3$, vagy $d = 5$ hiányozni fog az lko-k közül, így az $n = 7$ esetet kizárhatjuk.

(5) *Az $n = 6$ eset.* Itt 3–3 páros, illetve páratlan számnak kell lennie, $d = 5$ lko miatt a két 5-tel osztható szám a legkisebb és legnagyobb, egyikük páros, másik páratlan. $d = 4$ lko miatt a párosak közt két 4-gyel osztható van, így *a legkisebb és a legnagyobb páros szám 4-gyel is osztható*, és ezek a keresett sorrendben $d = 4$ miatt biztosan szomszédosak.

(i) Tegyük fel, hogy az 5-tel osztható páros szám a *legnagyobb*, ekkor a számaink

$$20k - 5, \quad 20k - 4, \quad 20k - 3, \quad 20k - 2, \quad 20k - 1, \quad 20k.$$

A megengedett sorrendben a páros számok láncá csak

$$20k - 2, \quad 20k - 4, \quad 20k$$

lehet, az 5-tel, illetve 3-mal osztható párok szükségképpen a páros lánc széléin lépnek fel. Ezért $3|20k - 2$, így viszont $3|20k - 5$ is teljesül, tehát a nagyság szerint egymást követő három páratlan számból az egyetlen 3-mal osztható a $20k - 5$ lenne, így erre a számra két helyen is szükség volna, a $20k - 2$ előtt $d = 3$ miatt, és a $20k$ után $d = 5$ miatt, ami lehetetlen.

(ii) Tegyük fel, hogy az 5-tel osztható páros szám a *legkisebb*, ekkor a számaink

$$20k, \quad 20k + 1, \quad 20k + 2, \quad 20k + 3, \quad 20k + 4, \quad 20k + 5.$$

A megengedett sorrendben a páros számok láncá csak

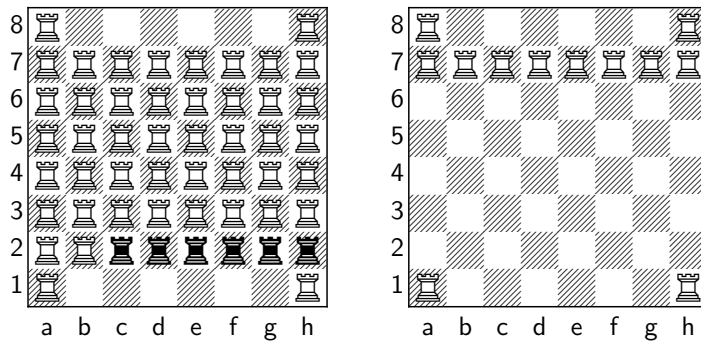
$$20k + 2, \quad 20k + 4, \quad 20k$$

lehet, az előzőhöz hasonlóan most $3|20k + 2$ kellene, ami itt $3|20k + 5$ miatt ugyanúgy ellentmondásra vezet.

89. Egy 4×4 -es sakktáblán minden mezőn áll egy bástya. Egyesével levehetjük őket, mindig olyan bástyát, amelyik páratlan számú bástyát tart ütés alatt. Legfeljebb hány bástyát lehet így leszedni a tábláról?

Megoldás. Legfeljebb 11-et. Általánosan, $n \times m$ -es táblán legfeljebb $nm - 5$ bástyát lehet levenni, azaz 5 bábu mindenképpen a táblán marad. A négy sarok érinthetetlen, mert indirekt, amelyik sarkot először vennénk le, annak a sorában és oszlopában van még bábu, ha máshol nem, akkor az átellenes sarkokban, így az legalább két (sark esetén tehát pontosan két) helyről támadva lenne, ami ellentmondás. Hasonlóan, az *utolsó nem-sarok mezőt* sem lehet levenni, mivel a tábla belsejében 0 sarok, a tábla szélén pedig 2 sarok támadná.

Pontosan 5 bástya kivételével a többi bábút a következőképpen vehetjük le. Első lépésben a legalsó és a legfelső sor $n - 2$ *belső* mezőjét szedjük le. Ezután a teljes második sort leszedhetjük úgy, hogy a 3. mezőtől (c oszlop) kezdődően egyesével jobbra haladva leszedünk $n - 2$ mezőt – ezt a helyzetet mutatja a bal oldali ábra –, majd rendre az 1. és 2. mezőt (a és b oszlop). Soronként felfelé haladva ugyanígy „kitakaríthatjuk” a 3., 4., ..., $(m - 2)$ -edik sort (az ezt követő helyzetet mutatja a jobb oldali ábra), végül az utolsó teljes (azaz a legfelső előtti) sort a jobb szélső bábu kivételével leszedhetjük egyszerűen balról jobbra haladva. A táblaméretből csak annyit használtunk, hogy $n, m \geq 3$, tehát az állítás ebben az általános formában is igaz.

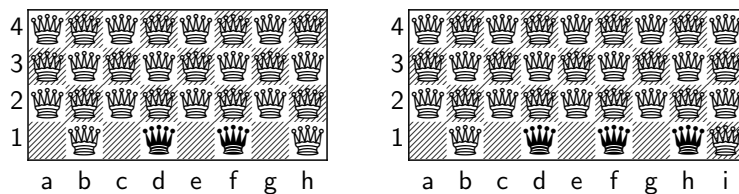


Megnézhetjük, hogy más sakfigurákkal hány bábu szedhető le ilyen paritásfeltétellel.

a. Vezérek

Vezéreknél mindig egy teljes sor leszedhető.

(i) Páros sorméretnél (bal oldali ábra) vegyük le a sorban balról jobbra minden másodikat, majd a maradék bábuk közül a *belsőket* – amiknek 5 (felül 3, oldalt 2) támadójuk van – tetszőleges sorrendben, ezek után a jobb szélsőt és végül a b oszlopbelit. (ii) Páratlan sorméret esetén ugyanígy vegyük le balról jobbra minden másodikat, de a jobb szélső vezért hagyjuk fent (jobb oldali ábra). Ezután a maradék bábuk közül a ismét a *belsőket* – amiknek 5 (felül 3, oldalt 2) támadójuk van – tetszőleges sorrendben, majd a jobb szélsőt és végül a b oszlopbelit.



Miután egyenként „kitakarítottuk” az alsó $n - 1$ sort, a legfelső sor triviálisan egyesével leszedhető egy bábu kivételével.

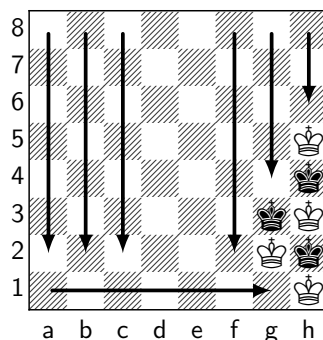
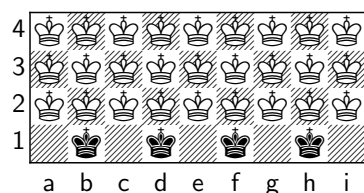
b. Királyok

Királyoknál a válasz a táblaméret paritásától függ. *Ha a tábla valamelyik irányban páratlan, akkor az utolsó bábuig mindegyik leszedhető, ha a tábla mindkét irányban páros, akkor viszont legalább 2 bábunak fent kell maradnia.* A második állítás belátásához legyen a királyok száma K , az egymást támadó párok száma E . Egy-egy bábu levétele után a $K + E$ összeg paritása nem változik, hiszen

K eggyel, E pedig páratlan számmal csökken (egy király levételével új támadó páros nem születhet, csak azok a párok szűnnek meg, ahol a levett király volt az egyik fél). Az $n \times m$ -es táblán kezdetben $K = nm$, és az egyes mezőkről támadott királyok száma, külön a belső, szélső és sarokmezőkről összesen $8mn - 6(n - 1 + m - 1) - 8$, az élek – támadásban álló párok – száma ennek a fele, tehát $K + E = 5mn - 3(n + m) + 2$, ami páros, ha m és n is páros, egyébként páratlan. Ha az utolsó bábuig mindegyik levehető, akkor $K + E$ értéke 1-re csökken, ezért a kiinduló állásban n és m közül valamelyiknek páratlannak kell lenni.

Az optimális eljárás *páratlan sorhossz esetén*: az alsó sortól kezdődően levesszük a sorban minden második bábut, majd utána a sormaradékot egyenként, ezzel a teljes sort kitakaríthatjuk (bal oldali ábra). Így az utolsóig minden sort kitakaríthatunk, majd a legfelső sor bábut az utolsó kivételével egyszerűen balról jobbra egyenként levehetjük.

Ha *mindkét irányban páros* sok mező van (jobb oldali ábra), akkor először levesszük kettesével lépkedve az alsó sort az utolsó bábu kivételével ($n - 1$ páratlan). Ezután balról jobbra haladva az $(m - 1)$ -es – szintén páratlan – oszlopokat takarítjuk le, az utolsó és az utolsó előtti oszlop kivételével. Az utolsó előtti oszlop alján 2 királyt hagyunk ($m - 3$ páratlan), az utolsó alján pedig – akár egyesével lépkedve – 5-öt. Végül a 7 királyból 5-öt levehetünk **h4, g3, h2, h1, g2** sorrendben az ábra jelölésével. Ezzel beláttuk, hogy ilyen táblán 2 kivétellel az összes király levehető.



c. Futók

A futók esetében a sötét és világos mezőn álló bábuk két külön problémát jelentenek. Ha a tábla négyzet alakú, akkor csak az átlókban lehet bábut levenni, saroktól kezdve sorban, egy híján az összeset. Így pl. 4×4 -es táblán 6 vehető le.

Az $n \times m$ -es nem-négyzetes tábla esetének háttérében egy gazdagabb, de jól leírható struktúra húzódik meg. Kezdeni csak sarokmezőben lehet: feltesszük, hogy a bal alsó sarokból indulunk. Konvenció szerinti ez sötét mező, tehát csak a sötét mezőn álló futókkal foglalkozunk. Speciálisan, ha mind a négy sarokmező sötét (n és m páratlan), akkor a világos mezőkről egyetlen futó sem vehető le.

Legyen $a = n - 1$, $b = m - 1$. Rendeljük hozzá az $n \times m$ -es „sakktáblához” a sarokmezők középpontjai által meghatározott $a \times b$ méretű „biliárdasztalt”, és tekintsük a biliárdasztal bal alsó sarkából 45° szögben induló biliárdgolyó útját. Ez az út *nem tartalmaz ciklust*. (Biz.: Ha tartalmazna, akkor a határon is ismétlődne valamelyik „fali ütközőpont”. Ha u lenne az első ismétlődő, akkor egyrészt u nem lehet sarok, mivel saroknál vagy csak indulni, vagy csak érkezni lehet. Másrészt ismétlésnél a golyónak az átlósan egy vonalban levő két fali ütközőpont egyikéből kellene érkeznie, de akkor az a fali pont egy u -nál korábbi ismétlődés lenne, ellentmondás.)

Az út hossza egyszerűen megadható a és b legkisebb közös többszörösével: $l = \sqrt{2} \cdot \text{lkk}(a, b)$. Ez azért igaz, mert a golyó a lépésenként ütközik az egyik irányú falakkal, és b lépésenként a másik irányúakkal. Mivel a sarkok mindkét irányú falhoz tartoznak, ezért sarokba érkezés első alkalommal a legkisebb közös többszörösénél, $\text{lkk}(a, b)$ lépés után következik be.

Ugyanez a gondolat segít megérteni, hogy a golyó *egyenletesen sűrűn* járja be az asztalt és *egyenlő helyközökkel* ütközik a falakon. Ha $(a, b) = 1$, akkor $(a - 1)$ -szer ütközik az a hosszúságú oldalakkal (ennyi b többszörös van $\text{lkk}(a, b) = ab$ -ig), és $(b - 1)$ -szer a b hosszúakkal. Mivel nincs ismétlődő ütközőpont a falon, így a két sarokkal együtt pontosan $(a + b)$ kerületi pont van a golyó pályáján. Ezek között nyilván nem lehet két közvetlenül szomszédos, mert a koordinátaösszeg – az induló sarkot választva origónak – mindig páros (lépésenként mindkét koordináta eggyel változik).

Tehát a *kerületen minden második rácspont ütközőpont*, és emiatt az asztalon minden második rácspont pályapont. Visszatérve a sakktáblás szóhasználatra, ez pontosan azt jelenti, hogy a golyó a sakktábla összes sötét mezőjén végighalad.

Belátjuk, hogy a *biliárdgolyó útján haladva minden lépés megengedett*, azaz lépésenként a soron következő futót mindig páratlan számú, még táblán levő bábu támadja. (1) Ha a soron következő futó a tábla szélén van, ott kezdetben pontosan két irányból volt támadva, és a két irány közül az egyiket éppen azzal a lépéssel szüntetjük meg (ürítjük ki), amivel a leveendő futóhoz érkezünk. (2) Ha a soron következő futó a tábla belsejében van, ott kezdetben négy irányból volt támadva. Ebből az egyiket éppen azzal a lépéssel szüntetjük meg, amivel a leveendő futóhoz érkezünk. De a másik három irány nem üres, mert a haladási irányra *merőleges szakasz végpontjain* a bábuk még a táblán vannak, különben azon a szakaszon korábban végimentünk volna, és a szóban forgó futó már nem lenne a táblán. Továbbá a haladási irány későbbi végpontja sem volt még bejárva, tehát e 3 irányban legközelebbi futók adják a soron következő futót támadó 3 bábút.

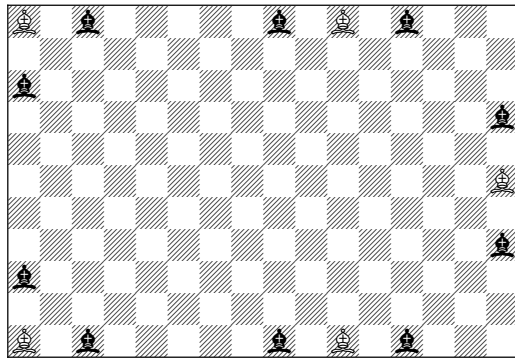
Az eddigiek alapján megállapíthatjuk, hogy ha a és b relatív prímek, azaz $(n-1, m-1) = 1$, akkor a sötét mezőkről egy kivétellel az összes futó leszedhető (szimmetriaokokból egy világos sarokmezőből induló, tükrözött lépéssorozattal az összes világos mező is bejárható).

A következő érdekes eset, ha $(a, b) = 2$. Ekkor n és m páratlan, ezért egy előző megjegyzés értelmében a világos futócsalád érinthetetlen, hiszen nincs világos sarokmező, így ezekre nincs a feltételnek megfelelő kezdőlépés. A sötét mezős futócsalád viszont *két diszjunkt biliárdgolyó-pályára esik szét*. Ezt ismét a fali ütközőpontok segítségével láthatjuk be.

Az origóból induló golyó $lkt(a, b) = ab/2$ lépésnél érkezik meg sarokba, ezen a pályán b lépésenként ütközik az egymástól b távolságra levő falakkal, ilyen fali ütközőpontból tehát $a/2 - 1$ van. Hasonlóan a másik párhuzamos oldalpáron $b/2 - 1$ van, ez összesen, az induló és érkező sarkot is számítva $(a+b)/2$ kerületi pont, azaz minden negyedik határpont. Ezek most is egyenletes osztópontok a határon, mert a párhuzamos falak között *mindkét* koordináta változása osztható 2-vel (általánosabban $lko(a, b) = d$ -vel). Tehát az origóból induló pálya azokat a határpontokat tartalmazza, ahol a koordináták összege osztható 4-gyel (általánosabban $2d$ -vel), és a darabszám miatt az összes ilyen tartalmazza.

A komplementer sötét határmezők, ahol $x + y = 4k + 2$, $x \in \{0, a\}$, $y \in \{0, b\}$, az origóból induló pálya tükrképéhez tartoznak. A tükrözés tengelye a(z egyik) 4-gyel nem osztható oldal felezőmerőlegese. Így a két pálya együtt az összes sötét fali oldalmezőt tartalmazza, amiből azonnal következik, hogy a két pálya együtt minden sötét mezőt lefed. Ha a két pályát egymás után járjuk be, akkor a lépések az egyes komponensekben mindig meg fognak felelni a feladat feltételének, ez az összefüggő esethez hasonlóan bizonyítható.

Végül, ha $d = (a, b) > 2$, akkor a sarkokból induló pályá(ko)n pontosan a d -vel osztható $(x + y)$ koordinátaösszegű fal melletti mezők lesznek elérhetők (ezek koordinátái $\lambda a + \mu b$ alakúak), ezekből $(a+b)/d < (a+b)/2$ van, így a többi fal melletti mezőn a bábuk biztosan fent maradnak a táblán. A következő ábra a 11×16 -os tábla szegélyén kialakuló helyzetet szemlélteti ($d = 5$). A fehér bábuk mutatják a szélső sötét mezőkről leszedhető $(x + y \equiv 0 \pmod{10})$ futókat, a fekete bábuk pedig az egyik nem leszedhető $(x + y \equiv \pm 2 \pmod{10})$ ciklust alkotó, sötét mezős futócsoportot.



Összefoglalva, a sarokmező színén álló futócsalád akkor és csak akkor szedhető le teljesen az utolsó bábuig, ha

$$lko(n-1, m-1) \leq 2.$$

A bizonyításból az is kiolvasható, hogy futók esetében *a teljes tábla kiürítése ekvivalens a tábla szegélyén felsorakoztatott futók kiürítésével.*

Megj.: A biliárdasztal tulajdonságairól több helyen is lehet olvasni, pl. Hugo Steinhaus magyarul is megjelent *Matematikai kaleidoszkóp* c. könyvében, vagy az interneten: <https://orbilu.uni.lu/bitstream/10993/35682/1/perucca-arithmetic-billiards.pdf>

90. A 7-es totón hét különböző jegyből álló számmal lehet részt venni. A sorsoláson egy ilyen, hét különböző jegyből álló számot sorsolnak. Egy tipp akkor nyertes, ha az a szám valamelyik számjegyében megegyezik a kisorsolt számmal. Ha például 0123456 a tipp, és a kisorsolt szám 1234567, akkor ez a tipp nincs a nyertesek között, míg a 9876543 egy nyertes tipp. Egy játékos több számmal is játszhat. Van-e 7 olyan tipp, amelyek között biztosan lesz nyertes is?

Megoldás. Egy tetszőleges tipp hét ciklikus eltoltja megfelelő:

1234567
2345671
3456712
4567123
5671234
6712345
7123456

Ugyanis a kihúzott számok közt van olyan, ami ezek közül való, és azt minden pozíción megjátszottuk valamelyik szelvényen. Sőt, ezt tovább javíthatjuk, elég 6 tetszőlegesen kiválasztott számot megjátszani 5 pozíción, ugyanis a kimaradó 4 szám legfeljebb 4 pozíción jelenhet meg, így az ötödik pozíción már egy kiválasztott szám lesz kisorsolva.

Így 6 szelvényen is lesz garantált találatunk.

12345 . .
23456 . .
34561 . .
45612 . .
56123 . .
61234 . .

Öt szelvény viszont kevés. Jelöljük az i -edik pozíción megjátszott számok halmazát M_i -vel, a nem megjátszottakat N_i -vel, a kihúzott számokat $r_1, \dots, r_7$ -tel. Ha – horribile dictu – a sorsolás irányított lenne, akkor az öt szelvény úgy tehetik nyeretlenné, hogy minden i -re r_i -t az N_i -ből választják. Ilyen hozzárendelés a Hall-tétel szerint létezik, ha $|N_{i_1} \cup \dots \cup N_{i_k}| \geq k$ minden $i_1, \dots, i_k \subseteq [1..7]$ k -asra. Ez a feltétel $k \leq 5$ -re automatikusan teljesül, hiszen csak 5 szelvény van, emiatt bármelyik pozíción $|N_i| \geq 5$.

És ha például $k = 6$ -ra nem teljesülne, akkor $N_{i_1} \cup \dots \cup N_{i_6} = N$ legfeljebb ötelemű lenne, ami a komplementerekre nézve azt jelenti, hogy e 6 pozíció mindegyikén ugyanaz az N -hez nem tartozó öt szám lett megjátszva. Mivel csak 5 szelvény van, ez ismétlődés nélkül nyilván lehetetlen.

Ugyanezzel a konstrukcióval és ugyanezzel a bizonyítással látható, hogy N különböző kimenetelű (pl. sorrend) totó játékban akkor és csak akkor lehet legalább egy találatunk, ha legalább $\lfloor N/2 \rfloor + 1$ szelvényen játszunk – és elég (ciklikus permutációkkal) a szelvények első $\lfloor N/2 \rfloor$ pozícióján fogadni.

91. Egy boszorkány fogságba ejtett hat törpét, és ezt mondta nekik: „Van hét különböző színű sapkám, a szivárvány hét színében. Holnap reggel bekötöm a szemeteket, majd a fejetekre teszek egy-egy sapkát, és ezután leveszem a kötést a szemetekről. Mindenki látja a többiek fején lévő sapkát, de nem látja a sajátját. Egymásnak nem adhattok segítséget a sapkák színéről. Mindenki leírja egy cédulára azt a tippet, hogy milyen színű sapka van a fején. Ha legalább három válasz helyes, akkor szabadon engedlek benneteket, különben itt maradtok örökre.”

A törpék kitalálhatnak-e olyan módszert, amely biztosan sikerre vezet, vagy ez reménytelen?

Megoldás. Van ilyen módszer. A törpék egy kör alakú palettát használnak (gondolatban), a 7 színt elhelyezik egy szabályos hétszög csúcaiban, és bevezetnek egy kétváltozós relációt a színek között: $c_1 \prec c_2$, ha ezen a palettán c_1 -et az óramutató járása szerinti, félfordulatnál kisebb forgatás viszi át c_2 -be.



Másnap reggel minden törpe két színt nem lát: a fején levő sapkáét, illetve a hetedik, fel nem használt sapkáét. Ez utóbbi a feladathoz mellékelt ábra szerint a *türkiz* volt. A törpék módszere az legyen, hogy mindenki a két hiányzó szín közül a nagyobbikat, azaz az órajárás szerint későbbi színt tippeli. Ekkor az a 3 törpe, akin a sapka színe a hiányzó szín után következik – az ábrán a sötétkék, a lila és a piros sapkás –, a helyes választ fogja adni.