Beke Manó: Bevezetés a differenciál- és integrálszámításba

(4. kiadás, 1967)

Ez a könyv döntő hatással volt 20. században az analízis tanulására. A könyv hat fejezetből áll. Minden fejezethez összefoglalás és a tárgyalt anyaghoz kapcsolódó feladatok csatlakoznak. A matematikai megfogalmazások és egyes definíciók nem minden esetben egyeznek meg a ma használatosakkal.

Az *I. fejezetben* az elsőfokú, az $\frac{1}{x}$, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arc\,tg} x$ függvényeket és ábrázolásukat tárgyalja. Foglalkozik a kör, a parabola, az ellipszis, a ciklois egyenletével. A fejezethez 8 feladat csatlakozik, közülük egyet mutatunk be.

„*3. Hogyan lehetne az $x^4 = 3x - 2$ negyedfokú egyenletet megoldani az $y = x^4$ görbe segítségével?*"

Ezt a feladatot ma is kitűzhetjük diákjainknak. A megoldásban azt javasolja, hogy ábrázoljuk ugyanabban a koordináta-rendszerben az $y = x^4$ görbét és az $y = 3x - 2$ egyenest. A görbe és az egyenes metszéspontjainak az abszcisszája adja a megoldásokat. Két metszéspont van, ezek abszcisszája $x_1 = 1$ és $x_2 \approx 0{,}815$.

A *II. fejezetben* a görbék emelkedésével, süllyedésével, és a hozzákapcsolt differenciálhányadossal foglalkozott. Az emelkedés fogalmát viszi át a görbékre, az emelkedés mértékszáma a szakaszhoz tartozó húr iránytényezője. A szelő határhelyzete az érintő, a görbének a P pontban való emelkedését a P pontbeli érintő iránytangensével méri. Megállapítja, hogy ahogyan az érintő a szelők határhelyzete, úgy az érintő iránytényezője határértéke a szelők iránytényezőjének. Bevezeti a differenciálhányados jelölését.

Konkrétan tárgyalja az $y = a \cdot x^2$, $y = x^3$, $y = x^n$ görbék emelkedésének mértékét, majd néhány elemi függvény (x^2, x^3, $\sin x$) differenciálhányadosát. A levezetéshez felhasználja a $\frac{\sin x}{x}$ határértékét. Elemezi a differenciálhányados előjelét is. Megállapítja a differenciálási szabályokat ($a =$ állandó, $af(x)$, $f(x) \pm g(x)$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, x^n, összetett függvény). Ismerteti néhány függvény differenciálási szabályát ($\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arc\,tg} x$), összefoglalja a szabályokat. 42 feladatot közöl. A legfontosabb kiegészítő elméleti ismeretekre lábjegyzetekben utal.

Megjegyezzük, hogy a differenciálhányados fogalma a geometria jelentésére támaszkodva kerül szemléletesen bevezetésre, nem esik szó a határérték definíciójáról. Új írásmódként jelöli meg azt, hogy az érintő iránytényezője a szelő iránytényezőjének határértéke, $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

A *III. fejezetben* a differenciálhányados fizikai jelentését elemezi (mozgások, sebesség, gyorsulás, nyomás, hőmérséklet). Tárgyalja a magasabb rendű differenciálhányadosokat. Nagyon hasznos rész az, ami a második differenciálhányadosból a függvény alakjára (szemléletesen homorú vagy domború), minimumára, maximumára (érintő helyzete) következtet. 11 példát közöl, amelyek, szinte Eulertől kezdve, minden tankönyvben megtalálhatók. Ezekből vesz át Rátz László is a Mikola Sándorral közös analízis könyvében.

A tárgyalt feladatok pl. az $f(x) = x^2 - 6x + 10$ függvény vizsgálata; vagy: *Bontsuk fel az a számot két részre úgy, hogy a részek szorzata a lehető legnagyobb legyen,* vagyis az $f(x) = x(a - x)$ *függvény* vizsgálata. Érdekes, hogy az általunk elsősorban geometriai szélsőértékkel megoldott feladatot, vagyis azt, hogy „*Hogyan lehet az A pontból a B pontba az e egyenes érintésével az ABC alakú legrövidebb úton eljutni?*" szélsőértékszámítással oldja meg, de megemlíti a geometriai jelentést is.

A fizikával való kapcsolatot tükrözi az utána következő feladat: *„Az A pontból a B pontba akarunk eljutni a legrövidebb idő alatt, az e egyenesig egyenletes sebességgel haladunk, az e egyenesen túl pedig c_1 sebességgel. Milyen úton menjünk?"*

A fejezethez 10 feladat csatlakozik, köztük szerepel a következő (ismert) geometriai szélsőérték-feladat: *„Egy háromszögbe téglalapokat írunk, úgy, hogy a téglalap alapja mindig a háromszög alapjának egy része legyen, a téglalap másik két csúcsa a háromszög oldalain legyen. Az így felvett háromszögek közül melyiknek maximális a területe?"*

Megfigyelhetjük azt is, hogy a feladatok nyitottak.

A *IV. fejezetben* a végtelen mértani sort tárgyalja. 1/3-ot közelíti végtelen tizedes törtekkel. *„A* 0,3, 0,33, 0,333, 0,3333, … *sorozat az* 1/3*-ot olyan pontosan közelíti meg, amint kívánjuk"*, *amit úgy fogalmaz meg, hogy „azt mondjuk, hogy a sorozat határértéke (limese) 1/3."* Leírja a pontos meghatározást is: *„A sorozat határértéke* 1/3*, ha bármilyen kis pozitív ε számot is adunk meg, elmehetünk a sorozatban olyan messzire, hogy azon túl minden tagja a sorozatnak ε-nál kevesebbet különbözzék az* 1/3*-tól."*

Tárgyalja a végtelen mértani sor összegét, a konvergens, divergens szavak jelentését, a Cauchy-féle hányadoskritériumot, a váltakozó előjelű sorokat, a D'Alembert-eljárást a konvergencia megállapítására, függvények sorbafejtését, a $\sin x$, $\cos x$ végtelen sorát, az exponenciális sort, *ln x* görbéjének a szerkesztését, $\ln(1+x)$ Taylor sorát, az interpoláció kérdését a logaritmusnál, kamatos kamatszámítást, és hogy hogyan változik a fény intenzitása, ha anyagon halad át. A fejezet végén tíz sorfejtéssel kapcsolatos feladat van.

Az *V. fejezet* integrálszámítással foglalkozik. A határozatlan integrál fogalmát a primitív függvény segítségével vezeti be, mint a differenciálás inverz műveletét. Összefoglalja az integrálási szabályokat, majd területeket számol, a parabola, hiperbola, szinuszgörbe, exponenciális görbe alatti területet. Bevezeti a határozott integrált, mint a területszámítás egy más módját. Az $y = e^x$ görbe alatti terület kiszámításakor a beosztást egyenlő részekre osztással készíti, míg az $y = x^n$ görbe esetében mértani sorozat szerinti beosztásban. Ezt a nézetet a későbbiekben a tankönyvírók nem követték, sok esetben az egyszerűség kedvéért a beosztás egyenlő részekre történt. Az integrálási szabályok összegyűjtését hasznosnak tartom, átláthatóbbak a szabályok. Megkeresi a főbb függvények primitív függvényét (hatványfüggvény, $\sin ax$, $\operatorname{tg} x$, $\sin^2 x$, $\cos^2 x, \ldots$ és alkalmazza területszámításra. A testek közül a csonka gúla, az ellipszoid térfogatát számolja ki, majd ívhosszt határoz meg.

Kitér a fizikai alkalmazásokra, a tömegközéppont, tehetetlenségi nyomaték meghatározására, vagyis olyan esetekre, ahol már az elemi matematika segédeszközei elégtelenek voltak. 42 gyakorlófeladat csatlakozik a fejezethez, integrálok kiszámítására, parciális integrálásra, sorok integrálására.

A *VI. fejezet* az integrálszámítás további alkalmazásait és a fizikai témájú differenciálegyenleteket tárgyalja (pl. mozgás állandó erő esetén, állandó az erő, de a közeg ellenálló, elektronok mozgása).

Az összefoglalási részben történeti áttekintés található. A könyv végén egy fejezet tartalmazza az egyes fejezetek feladatainak a rövid megoldását.