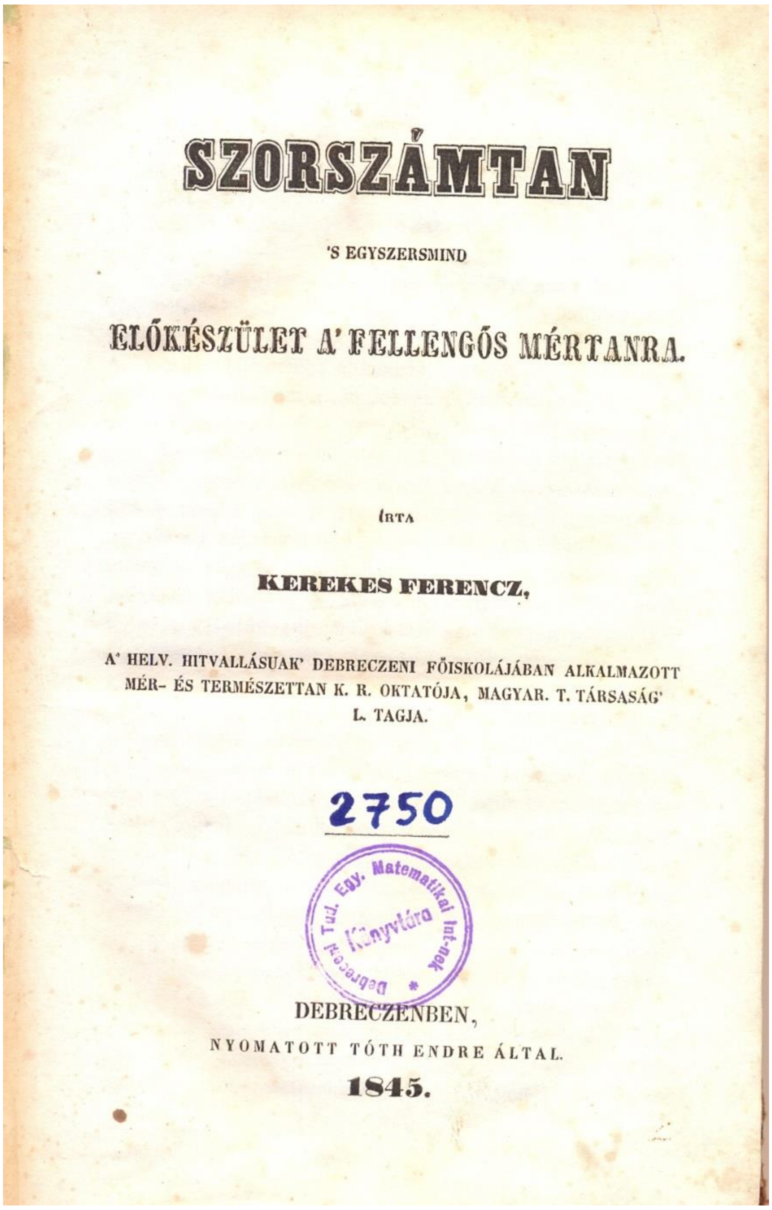


SZORSZÁMTAN

'S EGYSZERSMIND

ELŐKÉSZÜLET A' FELLENGŐS MÉRTANRA.

ÍRTA

KEREKES FERENCZ,

A' HELV. HITVALLÁSUAK' DEBRECZENI FŐISKOLÁJÁBAN ALKALMAZOTT MÉR- ÉS TERMÉSZETTAN K. R. OKTATÓJA, MAGYAR. T. TÁRSASÁG' L. TAGJA.

DEBRECZENBEN,

NYOMATOTT TÓTH ENDRE ÁLTAL.

1845.

A *Szorszámtan egyszersmind előkészületek a fellengős mértanra*[1] című magyar nyelvű könyvében a hatványozással, a logaritmussal és annak alkalmazásaival foglalkozik. Kerekes szerint erre a gazdasági fejlődés, a pénzügyi számolások miatt lett rá szükség.

A szorszám szó jelentése logaritmus, de a két kifejezést váltogatva használja. Megmondja, hogy mire jó a logaritmus: nagy számokkal végzett műveletek eredményeinek kiszámítására, kamatos kamat meghatározására, diszkont számítások elvégzésére, az éves járandóságok (annuitás) kiszámítására és egyéb pénzügyi számítások megkönnyítésére.

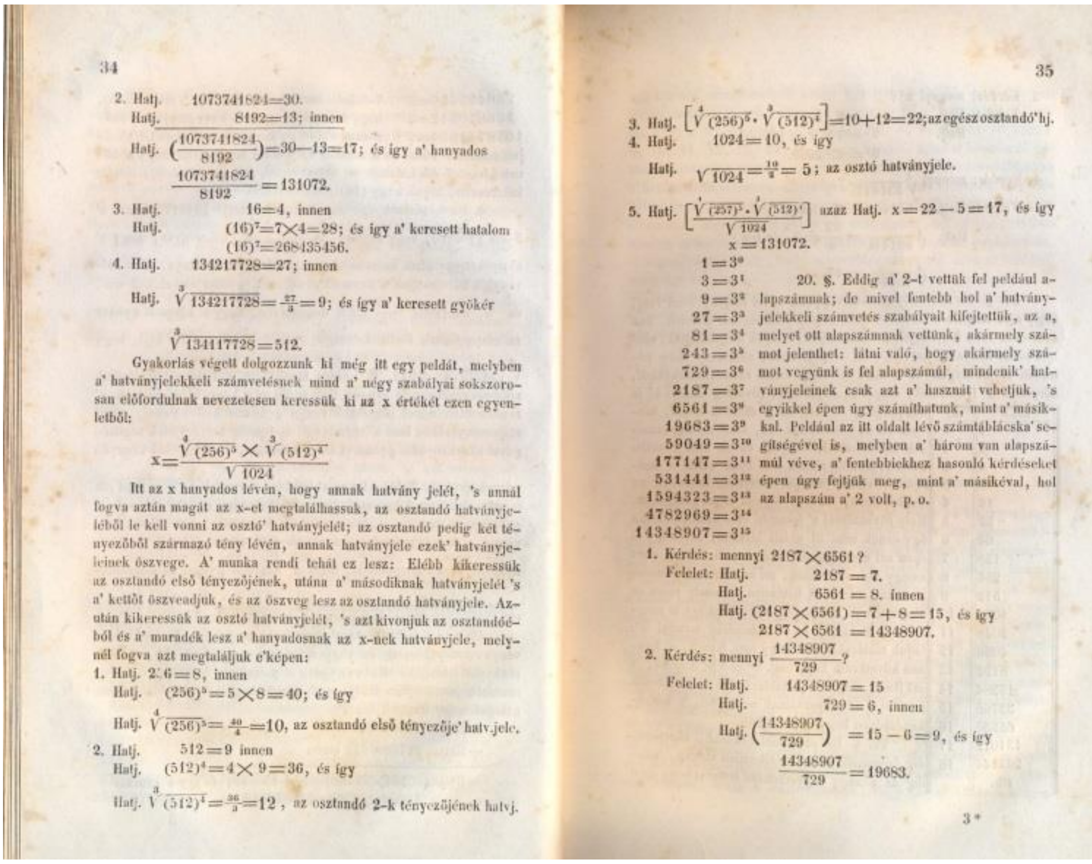
A könyv két részből áll. Az első rész az alsóbb szorszámtan, a második rész a felsőbb szorszámtan. Az első rész lényegében ma középiskolai tananyag.

---

[1] A fellengős mértan jelentése: felsőbb matematika, azaz analízis.

Bevezetés

Tartalmazza a hatványozás fogalmát pozitív egész, a 0, negatív egész és a tört kitevő esetére, tárgyalja a hatványozás azonosságait, a gyök és a törtkitevő kapcsolatát.[2] Nagyon sok példával világítja meg a szabályokat. Nyelvezetében sok helyen régies, a kor szavait használja, pl. gyökér (gyök), hatványjel. De világosan megmondja, hogy a logaritmus hatványkitevő, így ő ezekkel az ún. hatványjelekkel számol. Példákon keresztül érthetően, nagyon részletesen és logikusan magyaráz.



34

2. Hatj. $1073741824=30.$
Hatj. $8192=13$; innen

Hatj. $\left(\frac{1073741824}{8192}\right)=30-13=17$; és igy a' hanyados

$\frac{1073741824}{8192}=131072.$

3. Hatj. $16=4$, innen
Hatj. $(16)^7=7\times4=28$; és igy a' keresett hatalom
$(16)^7=268435456.$

4. Hatj. $134217728=27$; innen

Hatj. $\sqrt[3]{134217728}=\frac{27}{3}=9$; és így a' keresett gyökér

$\sqrt[3]{134117728}=512.$

Gyakorlás végett dolgozzunk ki még itt egy peldát, melyben a' hatványjelekkeli számvetésnek mind a' négy szabályai sokszorosan előfordulnak nevezetesen keressük ki az x értékét ezen egyenletből:

$$x=\frac{\sqrt[4]{(256)^5}\times\sqrt[3]{(512)^4}}{\sqrt{1024}}$$

Itt az x hanyados lévén, hogy annak hatvány jelét, 's annál fogva aztán magát az x-et megtalálhassuk, az osztandó hatványjeléből le kell vonni az osztó' hatványjelét; az osztandó pedig két tényezőből származó tény lévén, annak hatványjele ezek' hatványjeleinek öszvege. A' munka rendi tehát ez lesz: Elébb kikeressük az osztandó első tényezőjének, utána a' másodiknak hatványjelét 's a' kettőt öszveadjuk, és az öszveg lesz az osztandó hatványjele. Azután kikeressük az osztó hatványjelét, 's azt kivonjuk az osztandóéból és a' maradék lesz a' hanyadosnak az x-nek hatványjele, melynél fogva azt megtaláljuk e'képen:

1. Hatj. $256=8$, innen
Hatj. $(256)^5=5\times8=40$; és így

Hatj. $\sqrt[4]{(256)^5}=\frac{40}{4}=10$, az osztandó első tényezője' hatv.jele.

2. Hatj. $512=9$ innen
Hatj. $(512)^4=4\times9=36$, és így

Hatj. $\sqrt[3]{(512)^4}=\frac{36}{3}=12$, az osztandó 2-k tényezőjének hatvj.

35

3. Hatj. $\left[\sqrt[4]{(256)^5}\cdot\sqrt[3]{(512)^4}\right]=10+12=22$; az egész osztandó' hj.
4. Hatj. $1024=10$, és igy

Hatj. $\sqrt{1024}=\frac{10}{2}=5$; az osztó hatványjele.

5. Hatj. $\left[\frac{\sqrt[4]{(257)^5}\cdot\sqrt[3]{(512)^4}}{\sqrt{1024}}\right]$ azaz Hatj. $x=22-5=17$, és így
$x=131072.$

$1=3^0$
$3=3^1$
$9=3^2$
$27=3^3$
$81=3^4$
$243=3^5$
$729=3^6$
$2187=3^7$
$6561=3^8$
$19683=3^9$
$59049=3^{10}$
$177147=3^{11}$
$531441=3^{12}$
$1594323=3^{13}$
$4782969=3^{14}$
$14348907=3^{15}$

20. §. Eddig a' 2-t vettük fel peldául alapszámnak; de mivel fentebb hol a' hatványjelekkeli számvetés szabályait kifejtettük, az a, melyet ott alapszámnak vettünk, akármely számot jelenthet: látni való, hogy akármely számot vegyünk is fel alapszámúl, mindenik' hatványjeleinek csak azt a' hasznát vehetjük, 's egyikkel épen úgy számíthatunk, mint a' másikkal. Peldául az itt oldalt lévő számtáblácska' segítségével is, melyben a' három van alapszámúl véve, a' fentebbiekhez hasonló kérdéseket épen úgy fejtjük meg, mint a' másikéval, hol az alapszám a' 2 volt, p. o.

1. Kérdés: mennyi 2187×6561?
Felelet: Hatj. $2187=7.$
Hatj. $6561=8.$ innen
Hatj. $(2187\times6561)=7+8=15$, és igy
$2187\times6561=14348907.$

2. Kérdés: mennyi $\frac{14348907}{729}$?
Felelet: Hatj. $14348907=15$
Hatj. $729=6$, innen
Hatj. $\left(\frac{14348907}{729}\right)=15-6=9$, és így
$\frac{14348907}{729}=19683.$

3*

I. szakasz

A szorszámokról általánosan

Megindokolja, hogy a logaritmust miért nevezi szorszámnak. „*A logaritmusok nem egyebek hatványjeleknél*”, vagyis megmutatja, hogy a hatványozásnál egy mennyiséget hányszor szoroztunk meg önmagával. Ma hatványkitevőnek nevezzük, azaz tükörfordításban használjuk a latin exponens potentia kifejezést. Foglalkozik az irracionális szám fogalmával. Megállapítja, hogy „*ezen fogalmat még a legjobb mértani (matematikai) könyveinkben is homály környékezi: kénytelen vagyok itt egy kis kitérést tenni.*”

Felteszi a kérdést: „*Mi lesz* $\sqrt{2}$ *?* ”

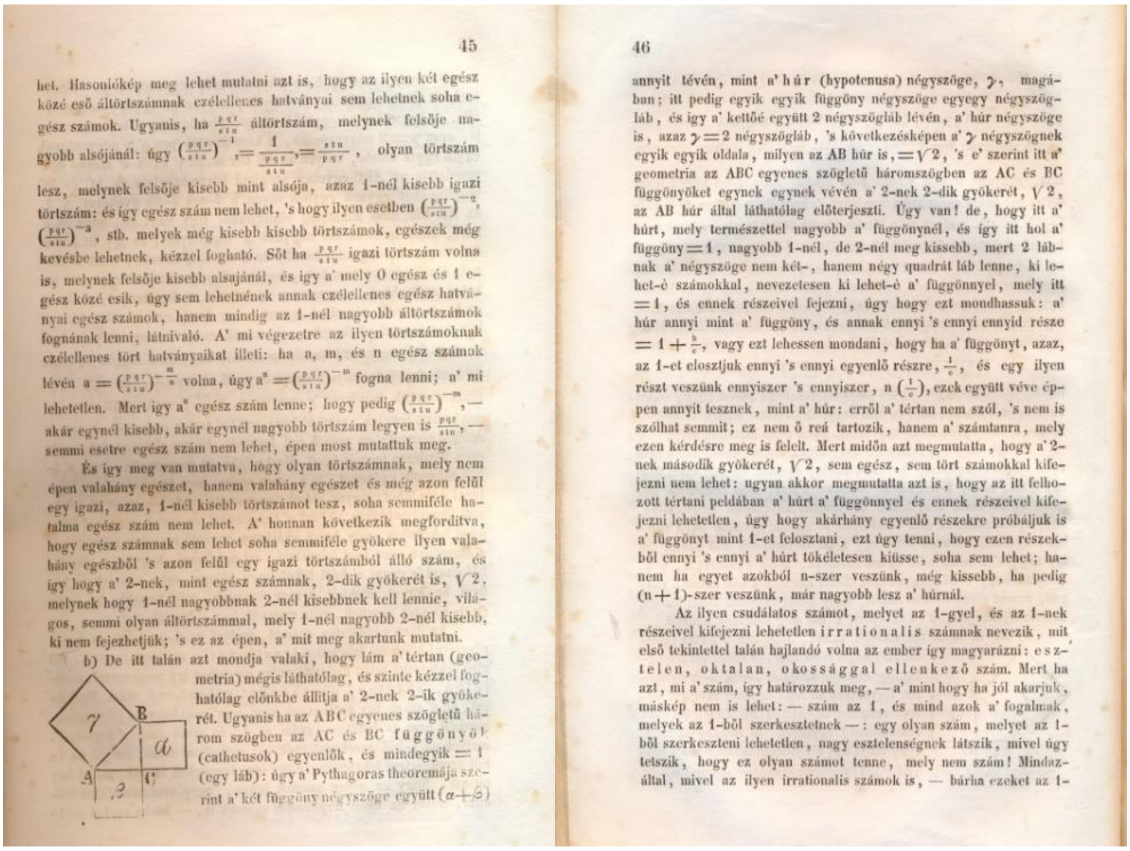
„*Felelet: ennek olyan számnak kell lennie, mely kétszer írva, mint szorzó a szorzat = 2 legyen, látnivaló, hogy 1-nél nagyobb, de 2-nél kisebb fog lenni, mivel 1 x 1 = 1, még kisebb, 2 x 2= 4*

[2] Erre a kérdésre a Négyes Kistükör tárgyalása során vissza fogunk térni.

pedig már nagyobb, mint 2. Vagyis egy olyan szám lesz, ami mely egynél nagyobb, de 2-nél kisebb, és nem lehet áltört."

Megmutatja, hogy $\sqrt{2}$ irracionális és kétoldali közelítéssel (oroszlánfogás) tízmilliomod pontosságig meghatározza az értékét.

Geometriai értelmezést is ad, Pitagorász tételét alkalmazza az egység befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszögre. *„De itt talán azt mondja valaki, hogy lám a tértan (geometria) mégis láthatólag, és szinte kézzel foghatólag előnkbe állítja a 2-nek 2-edik gyökét. Vagyis ha a befogók egyenlők és hosszúk egy, akkor az átfogó hossza* $\sqrt{2}$*."*



het. Hasonlókép meg lehet mutatni azt is, hogy az ilyen két egész közé eső áltörtszámnak czélellenes hatványai sem lehetnek soha egész számok. Ugyanis, ha $\frac{pqr}{stu}$ áltörtszám, melynek felsője nagyobb alsójánál: úgy $\left(\frac{pqr}{stu}\right)^{-1}, = \frac{1}{\frac{pqr}{stu}}, = \frac{stu}{pqr}$, olyan törtszám lesz, melynek felsője kisebb mint alsója, azaz 1-nél kisebb igazi törtszám: és így egész szám nem lehet, 's hogy ilyen esetben $\left(\frac{pqr}{stu}\right)^{-2}$, $\left(\frac{pqr}{stu}\right)^{-3}$, stb. melyek még kisebb kisebb törtszámok, egészek még kevésbe lehetnek, kézzel fogható. Sőt ha $\frac{pqr}{stu}$ igazi törtszám volna is, melynek felsője kisebb alsajánál, és igy a' mely 0 egész és 1 egész közé esik, úgy sem lehetnének annak czélellenes egész hatványai egész számok, hanem mindig az 1-nél nagyobb áltörtszámok fognának lenni, látnivaló. A' mi végezetre az ilyen törtszámoknak czélellenes tört hatványaikat illeti: ha a, m, és n egész számok lévén $a = \left(\frac{pqr}{stu}\right)^{-\frac{m}{n}}$ volna, úgy $a^n = \left(\frac{pqr}{stu}\right)^{-m}$ fogna lenni; a' mi lehetetlen. Mert igy a^n egész szám lenne; hogy pedig $\left(\frac{pqr}{stu}\right)^{-m}$, — akár egynél kisebb, akár egynél nagyobb törtszám legyen is $\frac{pqr}{stu}$, — semmi esetre egész szám nem lehet, épen most mutattuk meg.

És igy meg van mutatva, hogy olyan törtszámnak, mely nem épen valahány egészet, hanem valahány egészet és még azon felűl egy igazi, azaz, 1-nél kisebb törtszámot tesz, soha semmiféle hatalma egész szám nem lehet. A' honnan következik megfordítva, hogy egész számnak sem lehet soha semmiféle gyökere ilyen valahány egészből 's azon felűl egy igazi törtszámból álló szám, és igy hogy a' 2-nek, mint egész számnak, 2-dik gyökerét is, $\sqrt{2}$, melynek hogy 1-nél nagyobbnak 2-nél kisebbnek kell lennie, világos, semmi olyan áltörtszámmal, mely 1-nél nagyobb 2-nél kisebb, ki nem fejezhetjük; 's ez az épen, a' mit meg akartunk mutatni.

b) De itt talán azt mondja valaki, hogy lám a' tértan (geometria) mégis láthatólag, és szinte kézzel foghatólag előnkbe állítja a' 2-nek 2-ik gyökerét. Ugyanis ha az ABC egyenes szögletű háromszögben az AC és BC függönyök (cathetusok) egyenlők, és mindegyik = 1 (egy láb): úgy a' Pythagoras theoremája szerint a' két függöny négyszöge együtt $(\alpha + \beta)$

annyit tévén, mint a' húr (hypotenusa) négyszöge, γ, magában; itt pedig egyik egyik függöny négyszöge egyegy négyszögláb, és igy a' kettőé együtt 2 négyszögláb lévén, a' húr négyszöge is, azaz $\gamma = 2$ négyszögláb, 's következésképen a' γ négyszögnek egyik egyik oldala, milyen az AB húr is, $= \sqrt{2}$, 's e' szerint itt a' geometria az ABC egyenes szögletű háromszögben az AC és BC függönyöket egynek egynek vévén a' 2-nek 2-dik gyökerét, $\sqrt{2}$, az AB húr által láthatólag előterjeszti. Úgy van! de, hogy itt a' húrt, mely természettel nagyobb a' függönynél, és így itt hol a' függöny = 1, nagyobb 1-nél, de 2-nél meg kissebb, mert 2 lábnak a' négyszöge nem két-, hanem négy quadrát láb lenne, ki lehet-è számokkal, nevezetesen ki lehet-è a' függönnyel, mely itt = 1, és ennek részeivel fejezni, úgy hogy ezt mondhassuk: a' húr annyi mint a' függöny, és annak ennyi 's ennyi ennyid része $= 1 + \frac{b}{c}$, vagy ezt lehessen mondani, hogy ha a' függönyt, azaz, az 1-et elosztjuk ennyi 's ennyi egyenlő részre, $\frac{1}{c}$, és egy ilyen részt veszünk ennyiszer 's ennyiszer, $n\left(\frac{1}{c}\right)$, ezek együtt véve éppen annyit tesznek, mint a' húr: erről a' tértan nem szól, 's nem is szólhat semmit; ez nem ő reá tartozik, hanem a' számtanra, mely ezen kérdésre meg is felelt. Mert midőn azt megmutatta, hogy a' 2-nek második gyökerét, $\sqrt{2}$, sem egész, sem tört számokkal kifejezni nem lehet: ugyan akkor megmutatta azt is, hogy az itt felhozott tértani peldában a' húrt a' függönnyel és ennek részeivel kifejezni lehetetlen, úgy hogy akárhány egyenlő részekre próbáljuk is a' függönyt mint 1-et felosztani, ezt úgy tenni, hogy ezen részekből ennyi 's ennyi a' húrt tökéletesen kiüsse, soha sem lehet; hanem ha egyet azokból n-szer veszünk, még kissebb, ha pedig $(n+1)$-szer veszünk, már nagyobb lesz a' húrnál.

Az ilyen csudálatos számot, melyet az 1-gyel, és az 1-nek részeivel kifejezni lehetetlen irrationalis számnak nevezik, mit első tekintettel talán hajlandó volna az ember így magyarázni: esztelen, oktalan, okossággal ellenkező szám. Mert ha azt, mi a' szám, így határozzuk meg, — a' mint hogy ha jól akarjuk, máskép nem is lehet: — szám az 1, és mind azok a' fogalmak, melyek az 1-ből szerkesztetnek —: egy olyan szám, melyet az 1-ből szerkeszteni lehetetlen, nagy esztelenségnek látszik, mivel úgy tetszik, hogy ez olyan számot tenne, mely nem szám! Mindazáltal, mivel az ilyen irrationalis számok is, — bárha ezeket az 1-

II. szakasz

A közönséges, vagyis Briggs-féle szorszámokról

Először egy rövid történeti áttekintést ad a logaritmus első feltalálóiról: Napier (1614), Jost Bürgi (1620), majd rátér a Briggs-féle 10-es alapú logaritmusra.

Kerekes két logaritmustáblázatot ajánl az olvasónak.

- Babbage: A természetes számok logaritmusai 1-108000 (1834)
- Véga: Logaritmisch-trigonometrisches Handbuch. Ez utóbbi annyival több, hogy tartalmazza a szögfüggvények logaritmusait is.

Megmagyarázza Véga táblázatát és bemutatja részletes használatát. Tárgyalja a logaritmus kikeresését és visszakeresését.

Felveti a kérdést: *Negatív számoknak lehet-e logaritmusa?*

Megjegyzés

A 21. században a zsebszámológép helyettesíti a logaritmustáblázattal való számolást, ma már nem számolnak logaritmustáblázat segítségével a diákok. Másrészt fel sem vetődik a középiskolában, hogy negatív számokra is lehet értelmezni a logaritmust. Sőt az sem, hogy törtkitevőjű gyökvonást is értelmezhetünk.

III. szakasz

Gyakorlatok a közönséges szorszámvetésben

Ebben a részben a logaritmus alkalmazásaival, pénzügyi kérdésekkel foglalkozik, pl. a tőkével és kamattal kapcsolatos számításokkal, olyanokkal, hogy kamatláb, meghatározása, a tőke gyümölcsözésének ideje, a tőke értékének növekedése ez alatt az idő alatt.

„37. kérdés: Ha valaki 1000 Ft-ot vett fel 100-tól 6-os kamatra, és 10 esztendeig semmi kamatot sem fizetett, ekkor micsoda summát tartozik fizetni hitelezőjének, ha a kamatok minden év végén tőkésítettnek? (98. oldal)"

Nagyon alaposan és módszeresen, szinte minden kamattal kapcsolatos gyakorlati feladattípust kidolgoz.

A 42. §-ban népességszámlálási problémákkal foglalkozik.

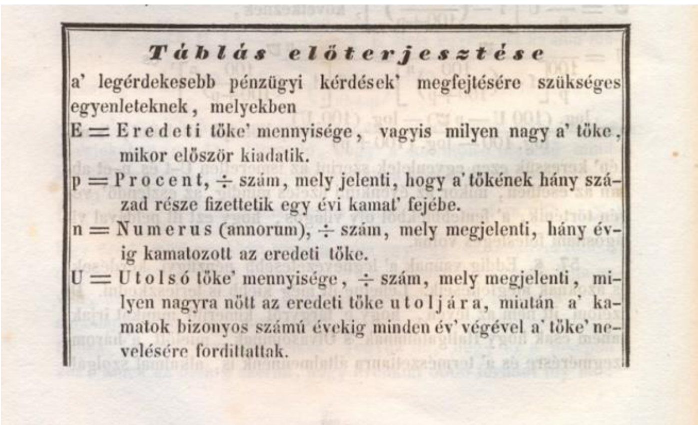
„A Pesti Hírlap 1842-ben, Januárius 9-én a 22. lapon ezt írta: Az utolsó 40 év alatt Nagy-Britanniának népessége (Anglia, Skócia, Wales, és a kis sziget) 10472048-ról 18664761-re hágott."

Az újságszöveg alapján tesz fel kérdéseket:

- *Hány százalékos volt a népesség növekedése?*
- *Mennyire fog szaporodni a népesség 1842-től 1882-ig, ha a szaporodás úgy megy, mint eddig?*

Tárgyalta a nyugdíj kérdését, a járadékszámítást, az évi járandóságot, az adósságot és annak törlesztését, a diszkontálást.

Végül táblázatban foglalta össze a tárgyalt eseteket (126-127-128. oldal).



Táblás előterjesztése

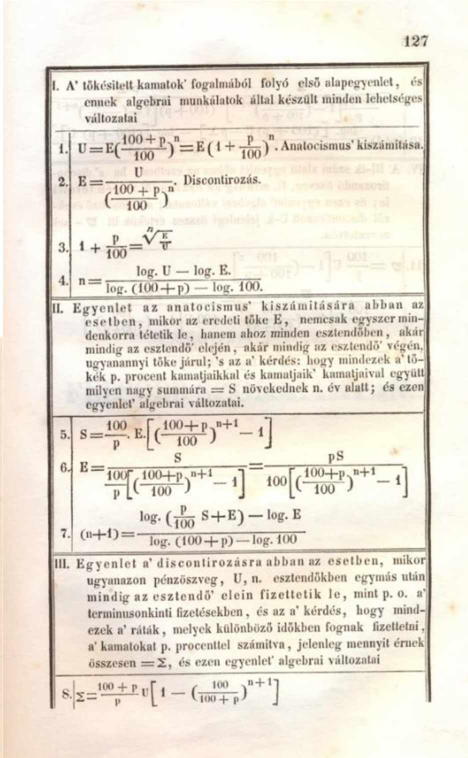
a' legérdekesebb pénzügyi kérdések' megfejtésére szükséges egyenleteknek, melyekben

E = Eredeti tőke' mennyisége, vagyis milyen nagy a' tőke, mikor először kiadatik.

p = Procent, ÷ szám, mely jelenti, hogy a' tőkének hány század része fizettetik egy évi kamat' fejébe.

n = Numerus (annorum), ÷ szám, mely megjelenti, hány évig kamatozott az eredeti tőke.

U = Utolsó tőke' mennyisége, ÷ szám, mely megjelenti, milyen nagyra nőtt az eredeti tőke utoljára, miután a' kamatok bizonyos számú évekig minden év' végével a' tőke' nevelésére fordittattak.



127

I. A' tőkésitett kamatok' fogalmából folyó első alapegyenlet, és ennek algebrai munkálatok által készült minden lehetséges változatai

1. $U = E\left(\frac{100+p}{100}\right)^n = E\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$. Anatocismus' kiszámitása.

2. $E = \frac{U}{\left(\frac{100+p}{100}\right)^n}$. Discontirozás.

3. $1+\frac{p}{100} = \sqrt[n]{\frac{E}{U}}$

4. $n = \frac{\log. U - \log. E.}{\log.(100+p) - \log. 100.}$

II. Egyenlet az anatocismus' kiszámitására abban az esetben, mikor az eredeti tőke E, nemcsak egyszer mindenkorra tétetik le, hanem ahoz minden esztendőben, akár mindig az esztendő' elején, akár mindig az esztendő' végén, ugyanannyi tőke járul; 's az a' kérdés: hogy mindezek a' tőkék p. procent kamatjaikkal és kamatjaik' kamatjaival együtt milyen nagy summára = S növekednek n. év alatt; és ezen egyenlet' algebrai változatai.

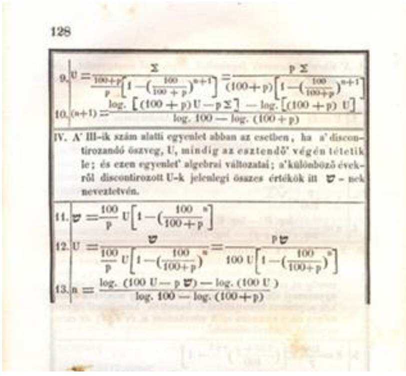
5. $S = \frac{100}{p}. E.\left[\left(\frac{100+p}{100}\right)^{n+1} - 1\right]$

6. $E = \frac{S}{\frac{100}{p}\left[\left(\frac{100+p}{100}\right)^{n+1} - 1\right]} = \frac{pS}{100\left[\left(\frac{100+p}{100}\right)^{n+1} - 1\right]}$

7. $(n+1) = \frac{\log.\left(\frac{p}{100}S+E\right) - \log. E}{\log.(100+p) - \log. 100}$

III. Egyenlet a' discontirozásra abban az esetben, mikor ugyanazon pénzöszveg, U, n. esztendőkben egymás után mindig az esztendő' elein fizettetik le, mint p. o. a' terminusonkinti fizetésekben, és az a' kérdés, hogy mindezek a' ráták, melyek különböző időkben fognak fizettetni, a' kamatokat p. procenttel számitva, jelenleg mennyit érnek összesen $=\Sigma$, és ezen egyenlet' algebrai változatai

8. $\Sigma = \frac{100+p}{p}U\left[1 - \left(\frac{100}{100+p}\right)^{n+1}\right]$



128

9. $U = \frac{\Sigma}{\frac{100+p}{p}\left[1-\left(\frac{100}{100+p}\right)^{n+1}\right]} = \frac{p\Sigma}{(100+p)\left[1-\left(\frac{100}{100+p}\right)^{n+1}\right]}$

10. $(n+1) = \frac{\log.\left[(100+p)U - p\Sigma\right] - \log.\left[(100+p)U\right]}{\log. 100 - \log.(100+p)}$

IV. A' III-ik szám alatti egyenlet abban az esetben, ha a' discontirozandó öszveg, U, mindig az esztendő' végén tétetik le; és ezen egyenlet' algebrai változatai; a'különböző évekről discontirozott U-k jelenlegi összes értékök itt ϖ - nek neveztetvén.

11. $\varpi = \frac{100}{p}U\left[1-\left(\frac{100}{100+p}\right)^n\right]$

12. $U = \frac{\varpi}{\frac{100}{p}U\left[1-\left(\frac{100}{100+p}\right)^n\right]} = \frac{p\varpi}{100\,U\left[1-\left(\frac{100}{100+p}\right)^n\right]}$

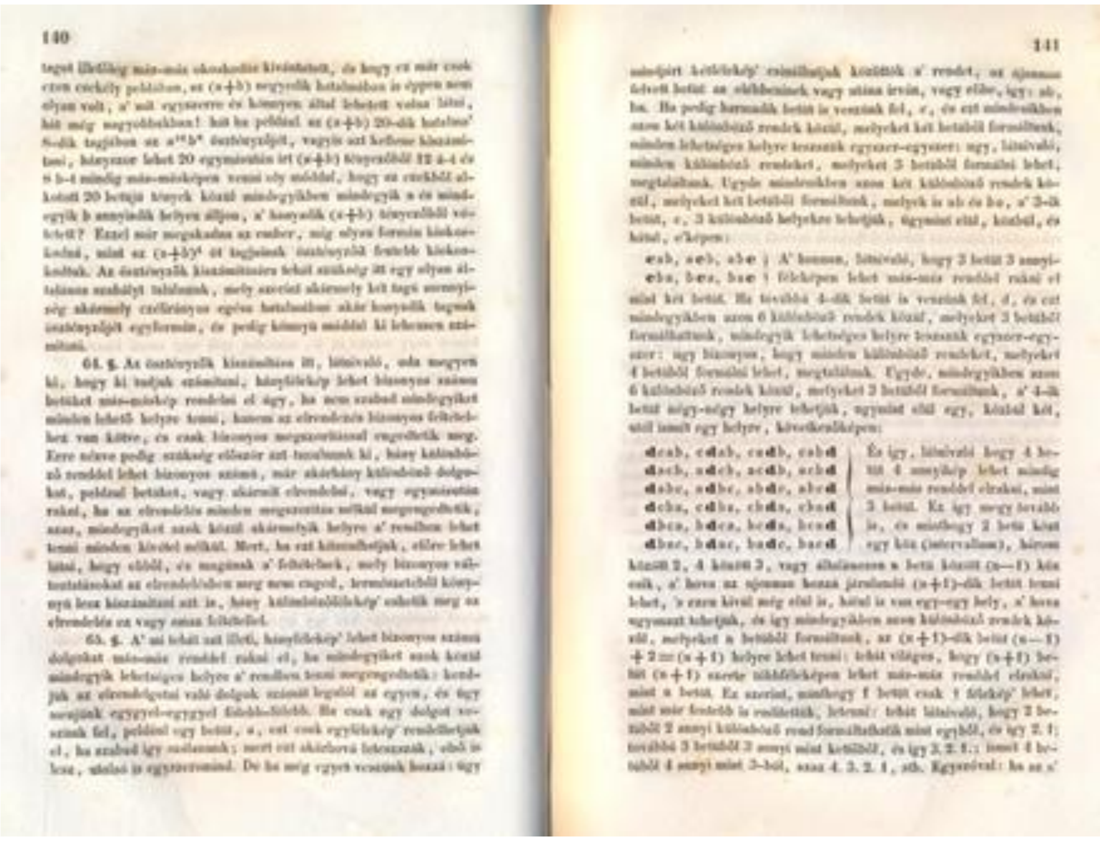
13. $n = \frac{\log.(100\,U - p\varpi) - \log.(100\,U)}{\log. 100 - \log.(100+p)}$

Második rész: Felsőbb szorszámtan

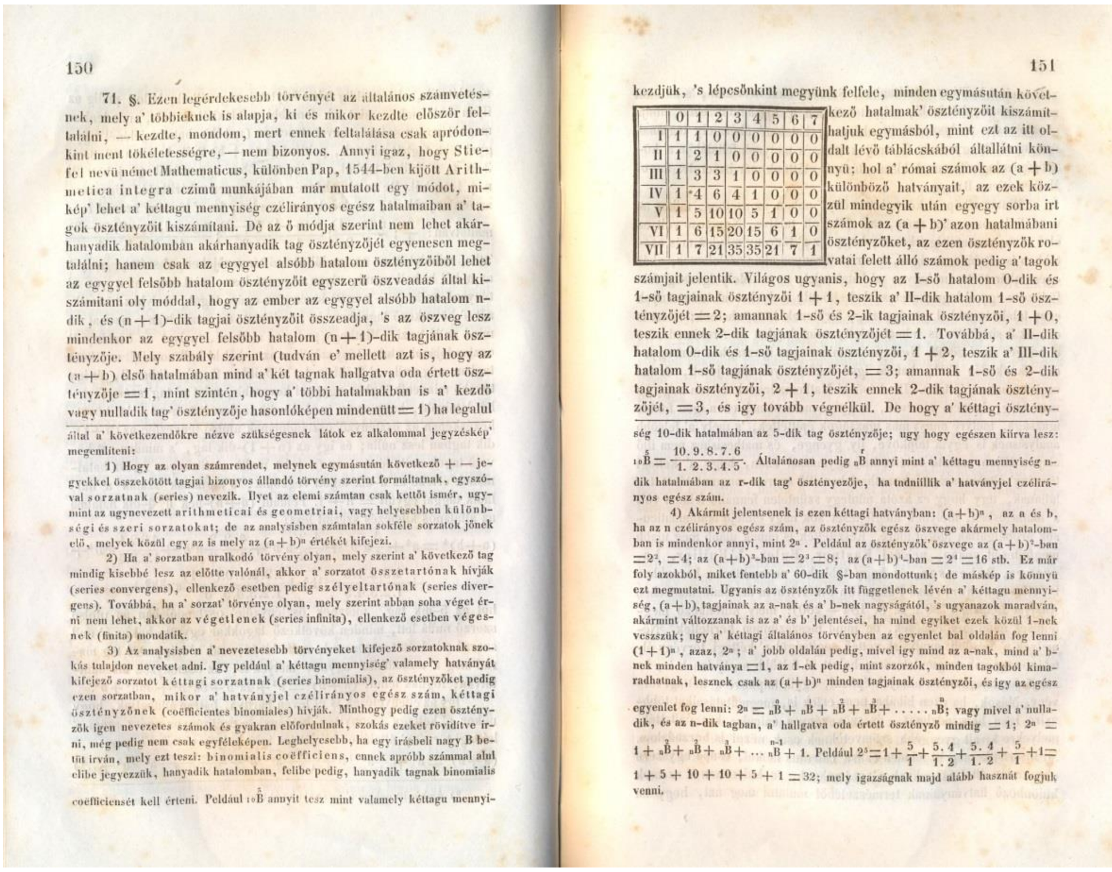
I. szakasz

A természetes szorszámokra vezető törvényekről

Itt tulajdonképpen algebrai kifejezésekkel végzett műveleteket tárgyal, két tagnak két taggal való szorzását, kéttagú kifejezés négyzetét, köbét, negyedik hatványát, általánosan a binomiális tételt, az $(a+b)^n$ -t, ha n pozitív egész *A levezetést kombinatorikai eszközökkel csinálja meg* (140-141. oldal).



A Pascal-háromszöget más formában adja meg, mint ahogy azt ma használjuk (151.oldal).



71. §. Ezen legérdekesebb törvényét az általános számvetésnek, mely a' többieknek is alapja, ki és mikor kezdte először feltalálni, — kezdte, mondom, mert ennek feltalálása csak apródonkint ment tökéletességre, — nem bizonyos. Annyi igaz, hogy Stiefel nevü német Mathematicus, különben Pap, 1544-ben kijött Arithmetica integra czimű munkájában már mutatott egy módot, miképʼ lehet a' kéttagu mennyiség czélirányos egész hatalmaiban a' tagok ösztényzőit kiszámitani. De az ő módja szerint nem lehet akárhanyadik hatalomban akárhanyadik tag ösztényzőjét egyenesen megtalálni; hanem csak az egygyel alsóbb hatalom ösztényzőiből lehet az egygyel felsőbb hatalom ösztényzőit egyszerü öszveadás által kiszámitani oly móddal, hogy az ember az egygyel alsóbb hatalom n-dik, és $(n+1)$-dik tagjai ösztényzőit összeadja, 's az öszveg lesz mindenkor az egygyel felsőbb hatalom $(n+1)$-dik tagjának ösztényzője. Mely szabály szerint (tudván e' mellett azt is, hogy az $(a+b)$ első hatalmában mind a' két tagnak hallgatva oda értett ösztényzője $=1$, mint szintén, hogy a' többi hatalmakban is a' kezdő vagy nulladik tag' ösztényzője hasonlóképen mindenütt $=1$) ha legalul

által a' következendőkre nézve szükségesnek látok ez alkalommal jegyzésképʼ megemliteni:

1) Hogy az olyan számrendet, melynek egymásután következő + — jegyekkel összekötött tagjai bizonyos állandó törvény szerint formáltatnak, egyszóval sorzatnak (series) nevezik. Ilyet az elemi számtan csak kettőt ismér, ugymint az ugynevezett arithmeticai és geometriai, vagy helyesebben különbségi és szeri sorzatokat; de az analysisben számtalan sokféle sorzatok jőnek elő, melyek közül egy az is mely az $(a+b)^n$ értékét kifejezi.

2) Ha a' sorzatban uralkodó törvény olyan, mely szerint a' következő tag mindig kisebbé lesz az előtte valónál, akkor a' sorzatot összetartónak hívják (series convergens), ellenkező esetben pedig szélyeltartónak (series divergens). Továbbá, ha a' sorzat' törvénye olyan, mely szerint abban soha véget érni nem lehet, akkor az végetlenek (series infinita), ellenkező esetben végesnek (finita) mondatik.

3) Az analysisben a' nevezetesebb törvényeket kifejező sorzatoknak szokás tulajdon neveket adni. Igy például a' kéttagu mennyiség' valamely hatványát kifejező sorzatot kéttagi sorzatnak (series binomialis), az ösztényzőket pedig ezen sorzatban, mikor a' hatványjel czélirányos egész szám, kéttagi ösztényzőnek (coëfficientes binomiales) hivják. Minthogy pedig ezen ösztényzők igen nevezetes számok és gyakran előfordulnak, szokás ezeket rövidítve irni, még pedig nem csak egyféleképen. Leghelyesebb, ha egy irásbeli nagy B betüt irván, mely ezt teszi: binomialis coëfficiens, ennek apróbb számmal alul elibe jegyezzük, hanyadik hatalomban, felibe pedig, hanyadik tagnak binomialis coëfficiensét kell érteni. Például ${}_{10}\overset{5}{B}$ annyit tesz mint valamely kéttagu mennyi-

kezdjük, 's lépcsőnkint megyünk felfele, minden egymásután következő hatalmak' ösztényzőit kiszámithatjuk egymásból, mint ezt az itt oldalt lévő táblácskából általlátni könnyü; hol a' római számok az $(a+b)$ különböző hatványait, az ezek közzül mindegyik után egyegy sorba irt számok az $(a+b)$' azon hatalmábani ösztényzőket, az ezen ösztényzők rovatai felett álló számok pedig a' tagok számjait jelentik.

	0	1	2	3	4	5	6	7
I	1	1	0	0	0	0	0	0
II	1	2	1	0	0	0	0	0
III	1	3	3	1	0	0	0	0
IV	1	4	6	4	1	0	0	0
V	1	5	10	10	5	1	0	0
VI	1	6	15	20	15	6	1	0
VII	1	7	21	35	35	21	7	1

Világos ugyanis, hogy az I-ső hatalom 0-dik és 1-ső tagjainak ösztényzői $1+1$, teszik a' II-dik hatalom 1-ső ösztényzőjét $=2$; amannak 1-ső és 2-ik tagjainak ösztényzői, $1+0$, teszik ennek 2-dik tagjának ösztényzőjét $=1$. Továbbá, a' II-dik hatalom 0-dik és 1-ső tagjainak ösztényzői, $1+2$, teszik a' III-dik hatalom 1-ső tagjának ösztényzőjét, $=3$; amannak 1-ső és 2-dik tagjainak ösztényzői, $2+1$, teszik ennek 2-dik tagjának ösztényzőjét, $=3$, és igy tovább végnélkül. De hogy a' kéttagi ösztény-

ség 10-dik hatalmában az 5-dik tag ösztényzője; ugy hogy egészen kiirva lesz: ${}_{10}\overset{5}{B} = \frac{10.9.8.7.6}{1.2.3.4.5}$. Általánosan pedig ${}_{n}\overset{r}{B}$ annyi mint a' kéttagu mennyiség n-dik hatalmában az r-dik tag' ösztényezője, ha tudniillik a' hatványjel czélirányos egész szám.

4) Akármit jelentsenek is ezen kéttagi hatványban: $(a+b)^n$, az a és b, ha az n czélirányos egész szám, az ösztényzők egész öszvege akármely hatalomban is mindenkor annyi, mint 2^n. Például az ösztényzők' öszvege az $(a+b)^2$-ban $=2^2$, $=4$; az $(a+b)^3$-ban $=2^3=8$; az $(a+b)^4$-ban $=2^4=16$ stb. Ez már foly azokból, miket fentebb a' 60-dik §-ban mondottunk; de máskép is könnyü ezt megmutatni. Ugyanis az ösztényzők itt függetlenek lévén a' kéttagu mennyiség, $(a+b)$, tagjainak az a-nak és a' b-nek nagyságától, 's ugyanazok maradván, akármint változzanak is az a' és b' jelentései, ha mind egyiket ezek közül 1-nek veszszük; ugy a' kéttagi általános törvényben az egyenlet bal oldalán fog lenni $(1+1)^n$, azaz, 2^n; a' jobb oldalán pedig, mivel igy mind az a-nak, mind a' b-nek minden hatványa $=1$, az 1-ek pedig, mint szorzók, minden tagokból kimaradhatnak, lesznek csak az $(a+b)^n$ minden tagjainak ösztényzői, és igy az egész egyenlet fog lenni: $2^n = {}_{n}\overset{0}{B} + {}_{n}\overset{1}{B} + {}_{n}\overset{2}{B} + {}_{n}\overset{3}{B} + \ldots\ldots {}_{n}\overset{n}{B}$; vagy mivel a' nulladik, és az n-dik tagban, a' hallgatva oda értett ösztényző mindig $=1$; $2^n = 1 + {}_{n}\overset{1}{B} + {}_{n}\overset{2}{B} + {}_{n}\overset{3}{B} + \ldots {}_{n}\overset{n-1}{B} + 1$. Például $2^5 = 1 + \frac{5}{1} + \frac{5.4}{1.2} + \frac{5.4}{1.2} + \frac{5}{1} + 1 = 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32$; mely igazságnak majd alább hasznát fogjuk venni.

Ez a tárgyalásmód számomra azért is érdekes, mert Rédei László akadémikus mezőtúri tanárként 1933-ban a Protestáns Tanügyi Szemlében megjelent cikkeiben[3] ilyen tárgyalásmódot javasolt.

Tárgyalja a binomiális tételt törtkitevőre és negatív kitevőre: $(a+b)^{\frac{2}{3}}$, $(a+b)^{\frac{n}{3}}$,$(a+b)^{\frac{m}{n}}$, $(a+b)^{-n}$, $(1+x^n)$. A törtkitevős hatvány ma nem tartozik bele a középiskolai tananyagba.

II. szakasz

Foglalkozik e^xsorba fejtésével, e meghatározásával, a természetes logaritmussal. Ma ez sem középiskolai tananyag.

III. szakasz

Átszámításokat és segédtáblázatokat tartalmaz a természetes alapú logaritmusok kiszámítására.

[3]Rédei László: A mennyiségtan középiskolai tanítása, A készülő új református középiskolai tanterv készülő részéhez, Protestáns Tanügyi Szemle VII. (1933) 10-16, 32-33.