Középszint

1. Tudja alkalmazni a logikai szita elvét két-három halmaz esetében.

1.1. Egy focicsapatnak 27 tagja van. A csapattagok közül 19-nek van tetoválása a karján, 14-nek van tetoválás a hátán, 9 játékosnak a karján és a hátán is van tetoválás.
a) Hány játékosnak van a karján, de nincs a hátán tetoválás?
b) Hány játékosnak nincs tetoválva sem a karja, sem a háta?

Megoldás
a) Ha az összes olyan játékos számából, akinek van a karján tetoválása, kivonjuk azoknak a számát, akiknek a hátán is van, akkor megkapjuk a kérdésre a választ: 19 – 9 = 10 játékosnak van a karján, de nincs a hátán tetoválás.
b) 10 játékosnak van tetoválás a karján, de nincs a hátán; 9 játékosnak mindkét helyen van; 14 – 9 = 5 játékosnak a hátán van, de a karján nincs. Azaz összesen 10 + 9 + 5 = 24 játékosnak van legalább az egyik helyen tetoválása, tehát 27 – 24 = 3 olyan játékos van, akinek egyik helyen sincs. (A két halmaz uniójának elemszámát a logikai szita formula segítségével is megkaphatjuk: 19 + 14 – 9 = 24.)

1.2. Egy országban két hírportálról lehet tájékozódni, a lakosság 70%-a olvassa valamelyiket. A hírolvasók 62%-a tájékozódik az egyikből, 43%-a olvassa a másikat. A lakosság hány százaléka olvassa mindkét sajtóterméket?

Megoldás
62 + 43 = 105, tehát a hírolvasók 5%-a, azaz a lakosság $5 \cdot 0{,}7 = 3{,}5$%-a tájékozódik mindkét sajtótermékből.

1.3. Egy művészeti iskola 35 tanulója jár rajzolni és 57 jár táncolni. Hányan vannak azok a tanulók, akik legalább az egyik foglalkozásra járnak,
a) ha a két foglalkozás különböző időpontokban van, és 12-en mindkettőre járnak?
b) ha a két foglalkozás egy időpontban van?

Megoldás
a) $|R \cup T| = |R| + |T| - |R \cap T| = 35 + 57 - 12 = 80$-an járnak legalább az egyik foglalkozásra.
b) Ha a két foglalkozás egy időpontban van, akkor nincs olyan tanuló, aki mindkettőre jár, vagyis a két halmaz metszete üres halmaz. $|R \cup T| = |R| + |T| - |R \cap T| = 35 + 57 - 0 = 92$-en járnak legalább az egyik foglalkozásra.

1.4. Az ELTE-n minden tanárszakos hallgató pontosan két szakon tanul. Egy tanárszakos összejövetelen 56 matek-, 18 kémia- és 42 angolszakos hallgató vesz részt. Közülük 10-en matek-kémia, 3-an kémia-angol és 15-en matematika-angol szakosok. Hányan vannak az összejövetelen?

Megoldás
Mivel nincs háromszakos tanár, ezért olyan hallgató, akinek a matek mellett se nem kémia, se nem angol a másik szakja 56 – (10 + 15) = 31 vesz részt az összejövetelen. Ugyanígy a „csak” kémia szakosok száma 5, a „csak” angol szakosok száma 24. Így az összejövetelen összesen 31 + 5 + 24 + 10 + 3 + 15 = 88 hallgató vesz részt.

1.5. Egy sportiskola egy évfolyamán 65-en fociznak, 45-en kosaraznak és 32-en úsznak. 20 diák focizik és kosarazik is, 25-en fociznak és úsznak, 15-en kosaraznak és úsznak. 8 olyan diák is van, aki mindhárom sportot műveli, az évfolyam 10 tanulója viszont egyik sportágban sem aktív. Hányan vannak az évfolyamon összesen?

Megoldás
Első megoldás Venn-diagrammal.

A válasz: 28 + 12 + 18 + 17 + 8 + 7 + 10 = 100-an vannak az évfolyamon összesen.

Második megoldás logikai szita formulával.
$|F \cup K \cup U| = |F| + |K| + |U| - |F \cap K| - |F \cap K| - |K \cap U| + |F \cap K \cap U| =$
$= 65 + 45 + 32 - 20 - 25 - 15 + 8 = 90$, ennyien vannak tehát azok, akik a három sport közül legalább az egyiket űzik. Az évfolyamon összesen 90 + 10 = 100-an vannak.

1.6. Egy gimnáziumi évfolyam 45 tanulója közül 36 tanul angolul, 18 németül és 12 franciául. Mindenki legalább egyet tanul ezek közül, de 4 tanuló mindhárom nyelven képezi magát. Hány olyan tanuló van az évfolyamon, aki pontosan két nyelvet tanul ezek közül?

Megoldás
A logikai szita formulába az ismert adatokat helyettesítve $45 = 36 + 18 + 12 - (|A \cap F| + |A \cap N| + |N \cap F|) + 4$, amiből $|A \cap F| + |A \cap N| + |N \cap F| = 25$. Ebben az összegben háromszor szerepelnek azok a tanulók, akik mindhárom nyelven tanulnak, így a pontosan két nyelvet tanulók száma: $25 - 4 \cdot 3 = 13$.

2. Tudjon definíciókat, tételeket pontosan megfogalmazni, valamint egyszerű állításokat, tételeket bizonyítani.

2.1. Egy háromszög egyik külső szöge a nem mellette fekvő belső szög kétszeresével egyenlő. Igazolja, hogy a háromszög egyenlőszárú!

Megoldás
Jelölje a kérdéses belső szög nagyságát α, ekkor az egyik nem mellette fekvő külső szög 2α, melyhez tartozó belső szög nagysága 180° – 2α. A háromszög belső szögeinek összege 180°, így a harmadik szög nagysága 180° – (180° – 2α + α) = α. Tehát a háromszögnek van két egyenlő nagyságú szöge, így valóban egyenlőszárú.

2.2. Zsófi szerint, ha egy négyszögben két oldal párhuzamos, a másik kettő pedig egyenlő hosszú, akkor a négyszög paralelogramma. Igaza van-e Zsófinak? Válaszát indokolja!

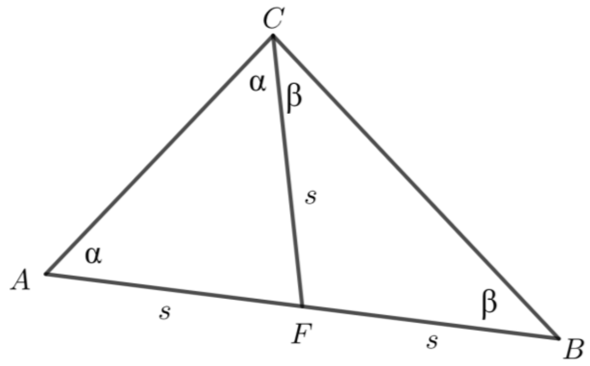
Megoldás
Zsófinak nincs igaza, mert van olyan négyszög, amelyben két oldal párhuzamos, a másik kettő pedig egyenlő hosszú, de a négyszög mégsem paralelogramma. Ilyen négyszög egy (nem téglalap) húrtrapéz. (Ha arról lenne szó, hogy a négyszögben egy oldalpárról tudjuk, hogy az oldalak párhuzamosak és egyenlő hosszúak, akkor az a négyszög valóban paralelogramma.)

2.3. Mutassa meg, hogy ha *n* pozitív egész szám, akkor $n^2 - 1 + (n-1)^2$ páros!
Megoldás
Alakítsuk át a kifejezést szorzattá. Ehhez először felbontjuk a zárójelet, majd összevonunk:

$n^2 - 1 + (n-1)^2 = n^2 - 1 + n^2 - 2n + 1 = 2n^2 - 2n = 2(n^2 - n)$. Ez utóbbi alakból látható, hogy valóban páros számot kapunk eredményül.

2.4. Egy háromszög egyik oldalának a hossza kétszer akkora, mint a hozzá tartozó súlyvonal hossza. Mutassa meg, hogy a háromszög derékszögű!

Megoldás
Az alábbi ábrán az *AB* oldal felezőpontja *F*. A feladat szövege értelmében az *AB* oldal hossza kétszerese a *CF* súlyvonal hosszának, tehát *AF* = *FB* = *FC* = *s*.



A *CF* súlyvonal tehát az *ABC* háromszöget két egyenlőszárú háromszögre bontja, így az ábrán azonosan jelölt szögek egyenlők. Miután a háromszög belső szögeinek összeg 180°, így $\alpha + \alpha + \beta + \beta = 180°$, azaz $2\alpha + 2\beta = 180°$, tehát $\alpha + \beta = 90°$, ami éppen a háromszög *C* csúcsnál lévő belső szögével egyenlő, a bizonyítandó állítás tehát igaz.

Vagy: *AF* = *FB* = *FC*, tehát *C* rajta van az *AB* átmérőjű körvonalon. Thalész tétele miatt az *ABC* háromszögben a *C* csúcsnál derékszög van.

3. Tudja megfogalmazni egy állítás megfordítását.

3.1. Adottak az alábbi állítások.
A = Ha egy háromszög két oldala egyenlő hosszú, akkor a háromszög szabályos.
B = Ha két szám egyenlő, akkor a két szám négyzete is egyenlő.
C = Ha egy szám kisebb, mint 5, akkor a négyzete kisebb, mint 25.
D = Ha *a* és *b* páros, akkor *a* + *b* páratlan.
E = Ha két szám előjele különböző, akkor a szorzatuk negatív.
a) Adja meg az állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)! Válaszát indokolja!
b) Adja meg az állítások megfordítását! Adja meg a megfordítás logikai értékét! Válaszát indokolja!

Megoldás
a)
A: hamis, mert van olyan egyenlőszárú háromszög, aminek nem minden oldala egyenlő hosszú.
B: igaz, mert két egyenlő számot ugyanazzal a számmal megszorozva az eredmény is egyenlő.
C: hamis, mert van olyan szám, ami kisebb, mint 5, de a négyzete nagyobb vagy egyenlő, mint 25, ilyen szám például a (–6), aminek a négyzete 36.
D: hamis, két páros szám összege páros.
E: igaz, egy pozitív és egy negatív szám szorzata negatív.
b)
A megfordítása: ha egy háromszög szabályos, akkor van két egyenlő hosszú oldala.
Ez az állítás igaz, mert a szabályos háromszögnek mindhárom oldala egyenlő hosszú.
B megfordítása: ha két szám négyzete egyenlő, akkor a két szám egyenlő.
Ez az állítás hamis, mert pl. 25 négyzete az 5-nek és a (–5)-nek is.
C megfordítása: ha egy szám négyzete kisebb, mint 25, akkor a szám kisebb, mint 5.
Ez az állítás igaz, mert a –5 és 5 közötti számokra igaz, hogy a négyzetük kisebb, mint 25.

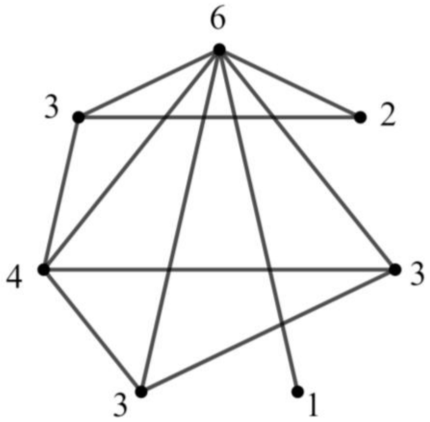
D megfordítása: ha két szám összege páratlan, akkor a két szám páros.
Ez az állítás hamis, ha két szám összege páratlan, akkor az egyik páros, a másik páratlan.
E megfordítása: ha két szám szorzata negatív, akkor a két szám előjele különböző.
Ez az állítás igaz, két szám szorzata csak úgy lehet negatív, ha az egyik pozitív, a másik pedig negatív.
Az *E* állítás „akkor és csak akkor” formában is igaz: két szám szorzata akkor és csak akkor negatív, ha a két szám előjele különböző.
Láthattuk tehát, hogy az állításnak és megfordításának a logikai értéke nem függ egymástól.

	állítás	megfordítás
A	hamis	igaz
B	igaz	hamis
C	hamis	igaz
D	hamis	hamis
E	igaz	igaz

4. Ismerje és alkalmazza gyakorlati feladatokban a gráf pontjainak fokszámösszege és éleinek száma közötti összefüggést.

4.1. Egy 7 fős tanulócsoportban szociometriai felmérést végeznek. Mindenki megjelöli, hogy kikkel van jó viszonyban a csoporton belül. Ha ketten egymást jelölik, akkor őket „barát”-nak tekinti a felmérés. A csoportvezető a felmérés után felírja, hogy kinek hány barátja van a csoporton belül. Az alábbiakban felsorolunk néhány számsorozatot. Melyek adhatják meg ezek közül a fenti felmérés eredményét? Válaszait indokolja!
a) 3, 3, 5, 7, 2, 4, 6
b) 1, 0, 3, 4, 6, 5, 3
c) 1, 3, 4, 5, 3, 5, 4
d) 1, 2, 3, 3, 3, 4, 6
e) Igazolja, hogy a valódi helyzetet leíró 7 szám között mindig van legalább kettő, ami egyenlő!

Megoldás
a) Mivel mindenkinek legfeljebb 6 barátja lehet a csoporton belül, ezért nem lehet 7-es a számok között.
b) Ha van valaki, akinek 6 barátja van a csoporton belül (azaz mindenki a barátja), akkor nem lehet olyan, akinek nincs a csoporton belül barátja. (Másként fogalmazva: nem lehet egyszerre 0 és 6 a helyesen felsorolt számok között.)
c) A megadott számok összege $1 + 3 + 4 + 5 + 3 + 5 + 4 = 25$. Miután minden baráti kapcsolathoz két személy tartozik, ezért a baráti kapcsolatok számának összege páros kell legyen. Az így megadott számsorozat tehát nem lehet a felmérés eredménye. Ha gráfként tekintünk a feladatra, akkor a pontok jelölik a személyeket és az élek a barátságokat, a pontok fokszáma pedig azt mutatja, hogy az egyes személyeknek hány barátja van a csoporton belül. Egy gráfban a csúcsok fokszámának összege mindig páros.
d) Először érdemes megnézni, hogy a számok összege páratlan vagy páros. Ebben az esetben ez 22, tehát páros. Ebből azonban még nem következik, hogy létezik a megfelelő gráf, hiszen a b) feladatban szereplő számok összege is 22.
Ha úgy érezzük, hogy lehet ilyen eset, akkor az ehhez tartozó gráf felrajzolását érdemes a legnagyobb és legkisebb számokkal kezdeni. Ez egy lehetséges eset, íme a hozzátartozó gráf:



e) A felmérés során az egyes személyekhez tartozó számok lehetnek: 0, 1, 2, 3, 4, 5 vagy 6. A b) feladatban már jeleztük, hogy 0 és 6 egyszerre nem szerepelhet a felsorolt számok között. Tehát a hét csoporttag legfeljebb 6 különböző számú baráttal rendelkezhet. Így a hét csoporttag által megadott számok között lennie kell legalább két ugyanolyannak.

4.2. Egy gólyatáborba érkező 26 elsőéves hallgató között összesen 58 (kölcsönös) ismeretség van korábbról. Öt olyan hallgató van, aki 4 másikat, hat olyan hallgató van, aki 5 másikat, és hét olyan hallgató van, aki 6 másikat ismer. Tudjuk, hogy a többi hallgató mindegyikének ugyanannyi ismerőse van a táborban. Hány ismerőse van ezeknek a hallgatóknak a táborban?

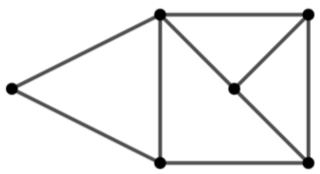
Megoldás
A feladatot szemléltető gráfban a csúcsok jelöljék a hallgatókat, az élek pedig az ismeretségeket. Ha az élek száma 58, akkor a fokszámok összege $2 \cdot 58 = 116$. Mivel 18 pont fokszámát ismerjük, így tudjuk, hogy ezek összege $5 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 6 = 92$. A fennmaradó $26 - 18 = 8$ pont fokszáma összesen $116 - 92 = 24$. Mivel ezeknek a pontoknak a fokszáma egyenlő, így a kérdéses fokszámok értéke $24 : 8 = 3$. Tehát a többi hallgatónak 3-3 ismerőse van a táborban.

Emelt szint

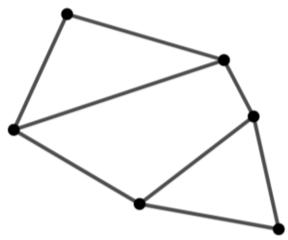
5. Definiálja és alkalmazza a következő fogalmakat: […] komplementer gráf, izomorf gráfok.

5.1. Állapítsa meg, hogy az alábbi gráfok izomorfok-e vagy sem! Válaszát indokolja!

a)

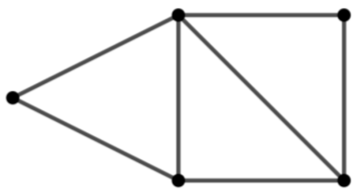


G

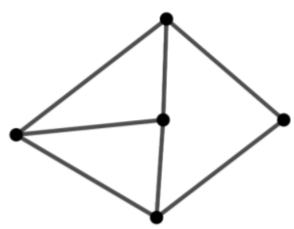


G'

b)

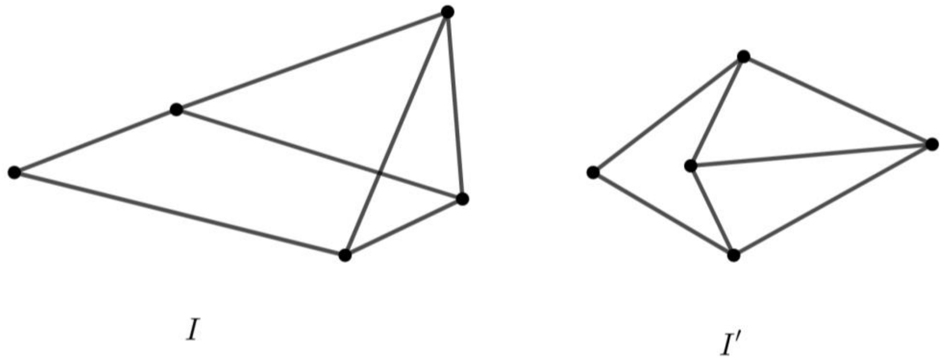


H

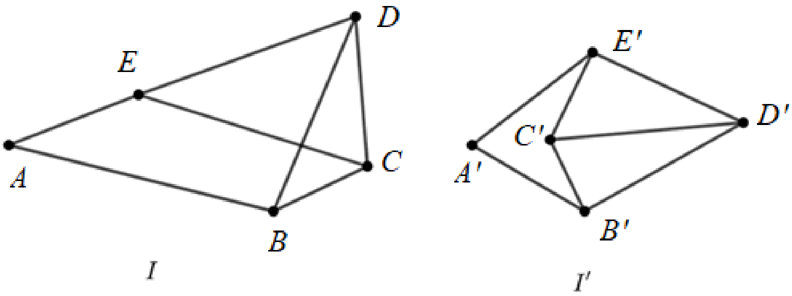


H'

c)

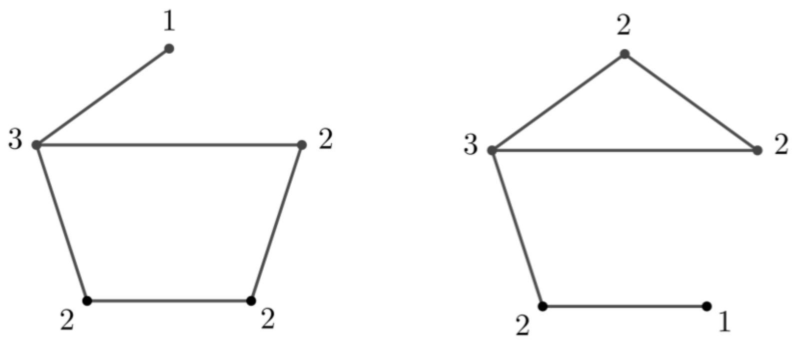


Megoldás
a) *G* és *G'* nem izomorf, indoklás például: *G*-ben 9, *G'*-ben 8 él van.
b) *H* és *H'* nem izomorf, indoklás például: *H*-ban van, *H'*-ben nincs 4-edfokú pont.
c) *I* és *I'* izomorf gráfok, indoklás: a két gráf csúcsai és élei között kölcsönösen egyértelmű és illeszkedéstartó megfeleltetés hozható létre. Így (*A*-nak *A'*, *B*-nek *B'* stb., valamint az *AB* élnek az *A'B'* él stb. feleltethető meg):



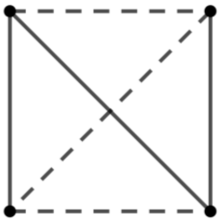
5.2. Rajzoljon két 5 csúcsú, egyszerű gráfot, amelyekben a csúcsok fokszámai 1; 2; 2; 2; 3, de a két gráf nem izomorf!

Megoldás

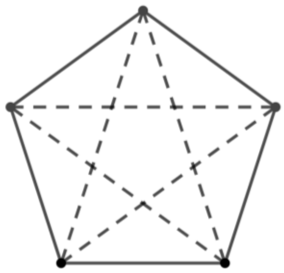


5.3. Van-e olyan
a) 4 pontú,
b) 5 pontú,
c) 6 pontú,
egyszerű gráf, amely izomorf a komplementerével?

Megoldás
a) Igen, van. Az alábbi ábrán a folytonos vonallal jelzett élek (illetve a szaggatott élek) ilyen gráfot alkotnak.



b) Igen, van. Az alábbi ábrán a folytonos vonallal jelzett élek (illetve a szaggatott élek) ilyen gráfot alkotnak.



c) Nincs ilyen gráf, hiszen a 6 pontú teljes gráfban az élek száma 15, ami páratlan szám.