

## Középszint

### Exponenciális egyenletek

*Tudjon exponenciális folyamatokkal kapcsolatos problémákat felismerni, modellezni és megoldani.*

1. A 2018-as esztendőben az  $A$  kisüzem 500 millió forint, a  $B$  kisüzem 400 millió forint értékű terméket állított elő. A hosszú távú fejlesztési tervek szerint az  $A$  üzem évi 5%-kal, a  $B$  üzem évi 6%-kal növeli a termelési értékét.
  - a) Számítsa ki, hogy a tervek szerint a következő 20 év alatt (2019-től 2038-ig) összesen hány millió forint értékű terméket állítanak elő az  $A$  üzemben!

Egy gazdasággal foglalkozó portálon nyilvánosságra hozták a fenti terveket. A cikkhez kapcsolódó fórumon vita bontakozott ki. Az egyik hozzászóló szerint a következő időszakban évről évre egyre kisebb lesz a két üzem éves termelési értéke közötti különbség.

- b) Számítsa ki a megadott táblázat hiányzó adatait, és igazolja, hogy ez a kijelentés nem igaz!

	2018	2019	2020	2021
$A$ üzem termelésének értéke (millió Ft)	500			
$B$ üzem termelésének értéke (millió Ft)	400			

A vitafórum egy másik résztvevője szerint éppen ellenkezőleg: a két üzem éves termelési értéke közötti különbség az évek múlásával egyre nagyobb lesz, és a  $B$  üzem termelési értéke soha nem fogja meghaladni az  $A$  üzem termelési értékét. Egy harmadik hozzászóló szerint ez sem igaz.

- c) Számítsa ki, hogy melyik évben éri utol a  $B$  üzem termelésének értéke az  $A$  üzem termelésének értékét! (Feltételezzük, hogy a termelések értéke valóban a tervek szerint alakul.)

*Megoldás:* (2023. májusi középszintű idegen nyelvű feladatsor 17. feladata):

[https://dload-oktatas.educatio.hu/erettsegi/feladatok\\_2023tavasz\\_kozep/k\\_matma\\_23maj\\_ut.pdf](https://dload-oktatas.educatio.hu/erettsegi/feladatok_2023tavasz_kozep/k_matma_23maj_ut.pdf)

2. Az interneten található adatok alapján a napenergiát elektromos energiává alakító eszközök maximális összteljesítményének magyarországi alakulását az alábbi táblázat szemlélteti (megawattban mérve).

év	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
összteljesítmény (MW)	12	35	77	168	225	300	640	1277

- a) Tételezzük fel, hogy az összteljesítmény évről évre ugyanannyiszorosára nőtt. 2013-tól 2019-ig évente hány százalékkal kellett volna növekednie az összteljesítménynek ahhoz, hogy 12 MW-ról 1277 MW-ra emelkedjen ezen időtartam alatt?

A maximális összteljesítmény alakulását exponenciális növekedésűnek feltételezve egy táblázatkezelő program a táblázatban megadott adatok alapján a  $c(x) = 17,84 \cdot 1,848^x$  közelítő összefüggést adja, ahol  $x$  a 2012 óta eltelt évek száma ( $x$  természetes szám),  $c(x)$  pedig MW-ban adja meg a maximális összteljesítményt a modell szerint.

- b) A kapott modell alapján hány százalékkal nő évről évre a maximális összteljesítmény?
- c) Hány százalékkal tér el a 2018. évi 640 MW-os adattól a modell alapján kiszámítható 2018-as érték?
- d) Ha a modellt hosszútávon is érvényesnek gondoljuk, akkor melyik évben éri el a maximális összteljesítmény a 40 000 MW-ot?

*Megoldás:*

- a) Ha  $q$ -val jelöljük azt, hogy évről évre hányszorosára nő az összteljesítmény, akkor  $12 \cdot q^7 = 1277$ .

Ebből  $q = \sqrt[7]{\frac{1277}{12}} \approx 1,9479$ , azaz évente kb. 95%-kal nő az összteljesítmény.

- b) A modell alapján évről évre az 1,848-szeresére, azaz 84,8%-kal nő az összteljesítmény.

- c) A modell alapján számított érték:  $c(6) = 17,84 \cdot 1,848^6 \approx 711$  MW.  $711 : 640 \approx 1,11$ , tehát ez az érték kb. 11%-kal tér el a valódi adattól.

- d) Megoldandó a  $17,84 \cdot 1,848^x = 40000$  egyenlet. Ebből  $1,848^x \approx 2242,2$ , azaz  $x \approx \log_{1,848} 2242,2 = \frac{\lg 2242,2}{\lg 1,848} \approx 12,56$ , azaz a modell hosszútávú érvényessége esetén (2012 + 13 =) 2025-ben éri el a maximális összteljesítmény a 40 000 MW-ot.

3. Rendelkezésünkre állnak az alábbi adatok a napenergiát elektromos energiává alakító eszközök maximális összteljesítményének

magyarországi alakulásáról.

év	2013	2019
összteljesítmény (MW)	35	1277

Tételezzük fel, hogy az összteljesítmény exponenciálisan alakul a  $c(x) = a \cdot b^x$  hozzárendelés alapján, ahol  $x$  a 2012 óta eltelt évek száma ( $x$  természetes szám),  $c(x)$  pedig MW-ban adja meg a maximális összteljesítményt. Számítsa ki  $a$  és  $b$  értékét!

*Megoldás:*

A feladat szövege alapján egyfelől ( $x = 1$  esetén)  $a \cdot b^1 = 35$ , másfelől ( $x = 7$  esetén)  $a \cdot b^7 = 1277$ . A két egyenletet elosztva egymással  $b^6 \approx 36,5$ , amiből  $b \approx 1,82$ , és így  $a \approx 19,23$ . (Érdeemes a kapott eredményt összehasonlítani az előző feladatban a táblázatkezelő program által illesztett összefüggés megfelelő értékeivel.)