

## Függvények

### 1. feladat (2008. októberi emelt szintű feladatsor, 9. feladat)

Egy bank a „Gondoskodás” nevű megtakarítási formáját ajánlja újszülöttek családjának. A megtakarításra vállalkozó családok a gyermek születését követő év első banki napján számlát nyithatnak 100 000 forint összeggel. Minden következő év első banki napján szintén 100 000 forintot kell befizetniük a számlára. Az utolsó befizetés annak az évnek az első banki napján történhet, amely évben a gyermekük betölti a 18. életévét. A bank év végén a számlán lévő összeg után évi 8%-os kamatot ad, amit a következő év első banki napjára ír jóvá. A gyermek a 18. születésnapját követő év első banki napján férhet hozzá a számlához.

a) Mekkora összeg van ekkor a számlán? A válaszát egész forintra kerekítse!

A gyermek a 18. születésnapját követő év első banki napján felveheti a számláján lévő teljes összeget. Ha nem veszi fel, akkor választhatja a következő lehetőséget is: Hat éven keresztül minden év első banki napján azonos összeget vehet fel. Az első részletet a 18. születésnapját követő év első banki napján veheti fel. A hatodik pénzfelvétellel a számla kiürül. Ha ezt a lehetőséget választja, akkor a bank – az első pénzfelvételtől számítva – minden év végén a számlán lévő összeg után évi 5%-os kamatot garantál, amit a következő év első banki napjára ír jóvá.

b) Ebben az esetben mekkora összeget vehet fel alkalmanként? A válaszát egész forintra kerekítse!

*A feladat megoldása (9. feladat):* [https://www.oktatas.hu/pub\\_bin/dload/kozoktatas/erttsegi/feladatok2008osz/e\\_mat\\_08okt\\_ut.pdf](https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/erttsegi/feladatok2008osz/e_mat_08okt_ut.pdf)

### 2. feladat (2013. május emelt szintű magyar nyelvű feladatsor, 4. feladat b) része)

Ádám is vett fel hitelekettől a banktól évi 8%-os kamatos kamatra. Az egyik év január 1-jén éppen 1 000 000 Ft tartozása volt. Több hitelt nem vett fel, és attól kezdve 10 éven keresztül minden év végén befizette az azonos összegű törlesztőrészletet. (A törlesztőrészlet összegét a bank már az éves kamattal megnövelt tartozásból vonja le.) Mekkora volt ez a törlesztőrészlet, ha Ádám a 10. befizetés után teljesen visszafizette a felvett hitelt? Válaszát ezer forintra kerekítve adja meg!

*A feladat megoldása (4. feladat b) része):* [https://dload-oktatas.educatio.hu/erttsegi/feladatok\\_2013tavasz\\_emelt/e\\_mat\\_13maj\\_ut.pdf](https://dload-oktatas.educatio.hu/erttsegi/feladatok_2013tavasz_emelt/e_mat_13maj_ut.pdf)

### 3. feladat

Kovács úr 6 év múlva autót szeretne vásárolni, ezért takarékoskodik. Minden év elején betesz a bankba egy ugyanakkora összeget. A bank 10% kamatot fizet évente. A Kovács úr által kinézett autó ára 5 000 000 Ft, amiről feltételezzük, hogy az évek során nem változik.

- a) Kovács úr első számításai alapján évente 500 000 Ft-ot tud félre tenni. Mennyi pénze lesz így a bankban 6 év elteltével? Meg tudja-e vásárolni a kinézett autót?

*Megoldás:*

A Kovács úr által a bankban az egyes évek elején elhelyezett összegek 10%-ot kamatoznak az év végére. Az első év elején elhelyezett összeg a 6. év végére forintban számolva  $500000 \cdot 1,1^6$ , a második év elején elhelyezett összeg a 6. év végére  $500000 \cdot 1,1^5$ , stb. a hatodik év elején elhelyezett összeg az év végére  $500000 \cdot 1,1$  Ft-ra nő. Így a hatodik év végén Kovács úr rendelkezésére álló összeg egy olyan mértani sorozat első hat elemének összegével egyenlő, melynek első tagja  $500000 \cdot 1,1$ , hányadosa pedig 1,1. A kérdéses összeg tehát:

$500000 \cdot 1,1 \cdot \frac{1,1^6 - 1}{1,1 - 1}$ , ami kb. 4 244 ezer Ft, azaz nem elegendő a kinézett autó megvásárlásához.

- b) Ha nem tudja megvásárolni, akkor mekkora összeget kellene félretennie évente, hogy mégis meg tudja vásárolni a kiszemelt járművet 6 év elteltével? Válaszát ezer forintra kerekítve adja meg!

*Megoldás:*

A gondolatmenet hasonló, csak most az évente befizetett összeget nem ismerjük, jelöljük ezt (forintban)  $x$ -szel. Ezzel a jelöléssel

megoldandó a következő egyenlőtlenség:  $x \cdot 1,1 \cdot \frac{1,1^6 - 1}{1,1 - 1} \geq 5\,000\,000$ . (Természetesen egyenlőséggel is megoldható a feladat.) A megoldás:

$x \geq 589\,124$ , azaz kb. 589 ezer forintot kell Kovács úrnak félretennie évente.

c) Ha nem tud 500 000 Ft-nál többet félretenni, akkor hány évig kell takarékoskodnia, hogy meg tudja venni az autót?

*Megoldás:*

A kérdéses évek számát  $n$ -nel jelölve (ahol  $n$  természetes szám), megoldandó a következő egyenlőtlenség:  $500\,000 \cdot 1,1 \cdot \frac{1,1^n - 1}{1,1 - 1} \geq 5\,000\,000$

. Ekvivalens átalakításokkal ebből:  $1,1^n \geq 1,909$ . Mindkét oldal tízes alapú logaritmusát véve ebből  $n \geq 6,8$ , azaz legalább 7 évig kell Kovács úrnak ebben az esetben takarékoskodnia.

#### 4. feladat

A Szabó család új lakást akar vásárolni. Ehhez kölcsönt vesznek fel, méghozzá 20 millió Ft-ot, 10 évre, évi 6%-os kamatra. Minden év végén törlesztik a kölcsönt és a kamatait, és 10 éven keresztül minden évben ugyanakkora összeget akarnak befizetni.

a) Mekkora lesz az éves törlesztőrészlet?

*Megoldás:*

Jelölje  $x$  az évenként fizetendő törlesztőrészletet forintban. Miután ezt év végén fizetik, ezért az első évben a teljes hitelösszeg kamatozik.

Az 1. év végén a maradék összeg tehát:  $2 \cdot 10^7 \cdot 1,06 - x$ . A második év végén:

$(2 \cdot 10^7 \cdot 1,06 - x) \cdot 1,06 - x = 2 \cdot 10^7 \cdot 1,06^2 - x \cdot 1,06 - x$ . A harmadik év végén a maradék összeg:  $2 \cdot 10^7 \cdot 1,06^3 - x \cdot 1,06^2 - x \cdot 1,06 - x$ . És így tovább, a 10. év végére a maradék összeg 0 lesz, azaz:  $2 \cdot 10^7 \cdot 1,06^{10} - x \cdot (1,06^9 + 1,06^8 + \dots + 1,06 + 1) = 0$ . Az  $x$  együtthatója egy mértani sorozat első 10 tagjának az összege, így  $2 \cdot 10^7 \cdot 1,06^{10} - x \cdot \frac{1,06^{10} - 1}{1,06 - 1} = 0$ .

Ebből  $x \approx 2\,717\,359$  Ft az éves törlesztőrészlet.

b) Kiderült, hogy nem tudnak ekkora összeget kifizetni évente, hanem csak 2,2 M Ft-ot. Hány évig kell törleszteniük ebben az esetben a hitelt?

*Megoldás:*

A megoldandó egyenlet ebben az esetben, ahol  $n$  jelöli a törlesztéshez szükséges évek számát:  $2 \cdot 10^7 \cdot 1,06^n - 2,2 \cdot 10^6 \cdot \frac{1,06^n - 1}{1,06 - 1} = 0$ , amiből

$1,06^n = 2,2$ , azaz  $n = \log_{1,06} 2,2 = \frac{\lg 2,2}{\lg 1,06} \approx 13,5$ , azaz, ha az éves törlesztőrészlet kevesebb, mint 2,2M Ft, akkor legalább 14 évig kell

törleszteniük a hitelt.

## 5. feladat

Annának van egy kis spórolt pénze és úgy dönt, hogy befekteti. Két lehetőség közül választhat. Mindkét esetben kamatos kamatot ígér a bank, azaz a kamatot hozzászámolják a tőkéhez, és a következő alkalommal már az is kamatozik.

„Lépcső betét”: a betett pénzösszeg havonta 1,5%-kal kamatozik.

„Ugrás betét”: a befektetett pénzösszeg évente 19%-kal kamatozik.

Anna két évre szeretne lekötni 500 000 Ft-ot. Melyik lehetőség és mennyivel kedvezőbb a számára?

*Megoldás:*

A Lépcső betét esetében az év végén a számlán lévő pénz összege:  $500\,000 \cdot 1,015^{24} \approx 714\,751$  Ft.

Az Ugrás betét esetében ugyanez:  $500\,000 \cdot 1,19^2 = 708\,050$  Ft.

A Lépcső betét kedvezőbb számára, kb. 6700 Ft-tal.

## 6. feladat

Balázs személyi kölcsönt szeretne felvenni 150 000 Ft összegben 12 hónapos futamidőre. Az alábbi két ajánlat közül választhat:

„Fix hitel”: a kölcsön kamata 15% évente és semmilyen más díjat nem kell fizetni. A kamatot és a tőkét egy összegben, a futamidő végén kell megfizetni.

„Extra hitel”: a kölcsön kamata 10% évente, emellett a folyósítási jutalék a hitelösszeg 1,5%-a, a szerződéskötési díj pedig 9 000 Ft. A folyósítási jutalékot és a szerződéskötési díjat a hitel felvételekor hozzáadják a hitelösszeghez. A kamatot és a tőkét egy összegben, a futamidő végén kell megfizetni

Melyik ajánlat kedvezőbb Balázs számára?

*Megoldás:*

A Fix hitel esetében az év végén fizetendő kamat összege  $150\,000 \cdot 0,15 = 22\,500$  Ft.

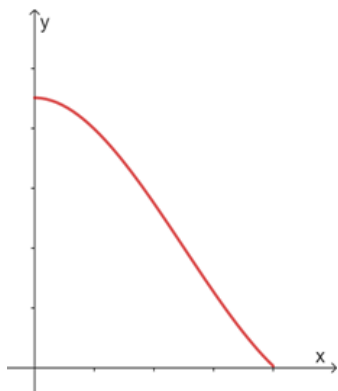
Az Extra hitel esetében a hitelösszeget megemeli a 2250 Ft folyósítási jutalék és a 9000 Ft szerződéskötési díj. Így a fizetendő kamat összege  $161\,250 \cdot 0,1 = 16\,125$  Ft. Így összesen  $16\,125 + 2250 + 9000 = 27\,375$  Ft a teljes költség a hitelen.

A Fix hitel kedvezőbb, annak ellenére, hogy a hitel kamata magasabb, mint az Extra hitel esetében.

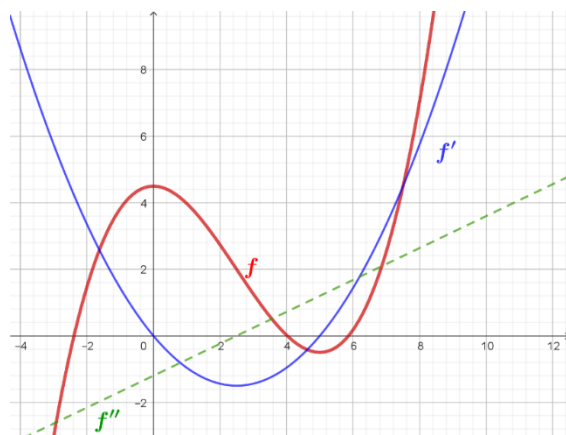
## 7. feladat

Az alábbi diagram egy vidámpark vízicsúszdájának alakját mutatja oldalnézetből. A diagram az alábbi függvénnyel közelíthető:

$f: [0; 4] \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto 0,08x^3 - 0,6x^2 + 4,5$ , ahol egy egység mindkét tengelyen 1 méternek felel meg. Számítsa ki, hogy milyen magasan van a csúszdának az a pontja, ahol a legmeredekebb!



*Megoldás:*



A függvény „balról jobbra” tekintve először konkáv, azaz a meredeksége – pontosabban, mivel a függvény meredeksége a teljes intervallumon negatív, annak abszolútértéke – egyre inkább növekszik, a legmeredekebb az inflexiós pontban lesz (itt lesz a deriváltnak minimuma), majd ezután a görbe konvex, tehát a meredekség (abszolútértéke) csökken. Az inflexiós pontot a második derivált segítségével találjuk meg:  $f''(x) = 0,48x - 1,2$ , ennek zérushelye  $x = 2,5$ -nél van (és itt valóban inflexiós pontja van a függvénynek). A legmeredekebb pont magassága:  $f(2,5) = 2$  méter.