

Cyberspace Mathematical Competition

1. nap

2020. július 13., hétfő

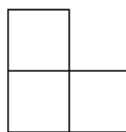


Cyberspace Mathematical Competition

Magyar (hun), 1. nap

2020. július 13., hétfő

1. feladat. Tekintsünk egy $n \times n$ egységnégyzetből álló táblát. A tábla főátlója abból az n egységnégyzetből áll, amelyek a bal felső sarkot a jobb alsóval összekötő átló mentén vannak. Van korlátlan számú ilyen csempénk:



A csempéket elforgathatjuk. Úgy szeretnénk csempéket elhelyezni a táblán, hogy mindegyik csempe pontosan három egységnégyzetet fedjen le, a csempék ne fedjék át egymást, a főátló egységnégyzetei közül semelyik se legyen lefedve, és minden más egységnégyzet pontosan egyszer legyen lefedve. Mely $n \geq 2$ számokra lehetséges ez?

2. feladat. Legyen $f(x) = 3x^2 + 1$. Bizonyítandó, hogy bármely adott pozitív egész n esetén az

$$f(1) \cdot f(2) \cdot \dots \cdot f(n)$$

szorzatnak legfeljebb n különböző prímosztója van.

3. feladat. Legyen ABC olyan háromszög, amelyre $AB > BC$, és legyen D a BC szakasznak egy változó belső pontja. Legyen E az a pont az ABC háromszög körülírt körén, a BC -nek A -val ellentétes oldalán, amelyre $\angle BAE = \angle DAC$. Legyen I az ABD háromszög beírt körének középpontja, és legyen J az ACE háromszög beírt körének középpontja. Bizonyítandó, hogy az IJ egyenes átmegy egy rögzített ponton, amely független D -től.

4. feladat. Legyen n páratlan pozitív egész. Egy $n \times n$ mezőből álló sakktábla bizonyos mezőit zöldre színezzük. Az derül ki, hogy a sakkjáték-beli király bármely zöld mezőről bármely másik zöld mezőre el tud jutni lépések véges sorozatával úgy, hogy eközben csak zöld mezőkön halad át. Bizonyítandó, hogy ezt legfeljebb $\frac{n^2 - 1}{2}$ lépésben mindig meg tudja tenni. (A király egy lépésben egy mezőről akkor és csak akkor léphet át egy másikra, ha a két mezőnek van közös csúcsa vagy oldala.)

Language: Hungarian

Munkaidő: 5 óra

Minden feladat 7 pontot ér.