

Examenul de bacalaureat național 2016

Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

I. FELADATSOR

(30 punct)

- 5p 1. Igazold, hogy $(\sqrt{2} - 3)^2 + (\sqrt{2} + 3)^2 = 22$.
- 5p 2. Számítsd ki az $f(-1)f(0)f(1)$ szorzatot, ahol $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 2$.
- 5p 3. Oldd meg a valós számok halmazán a $\log_3(x^2 - 6x + 6) = \log_3 1$ egyenletet!
- 5p 4. Határozd meg, hogy hány háromjegyű, különböző számjegyű, páros természetes szám alkotható az 5, 7, 8 és 9 számjegyekkel!
- 5p 5. Az xOy koordináta-rendszerben adott az $A(-1,0)$ és $B(1,2)$ pont. Írd fel annak a d egyenesnek az egyenletét, amely átmegy az O ponton és párhuzamos az AB egyenessel.
- 5p 6. Igazold, hogy $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 0$, bármely x valós szám esetén.

II. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adott az $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 + x \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix, ahol x valós szám.

5p a) Igazold, hogy $\det(A(1)) = 1$.

5p b) Bizonyítsd be, hogy $A(x)A(y) = A(x+y)$, bármely x és y valós számok esetén!

5p c) Határozd meg az a , $a \neq -1$, valós számot, tudva hogy:

$$A\left(\frac{1}{1 \cdot 2}\right) A\left(\frac{1}{2 \cdot 3}\right) \cdots A\left(\frac{1}{2016 \cdot 2017}\right) = A\left(\frac{a}{a+1}\right).$$

2. Adott az $f = X^4 + mX^2 + 2$ polinom, ahol m valós szám.

5p a) Határozd meg az m , valós számot, ha $f(1) = 0$.

5p b) Igazold, hogy $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) = 0$, bármely m valós szám esetén, ahol x_1, x_2, x_3 és x_4 az f polinom gyökei.

5p c) Ha $m = 3$, bontsd fel az f -et az $\mathbb{R}[X]$ halmazon irreducibilis tényezők szorzatára.

III. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ függvény.

5p a) Igazold, hogy $f'(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$, $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Határozd meg az f függvény grafikus képeének az $x = 0$ abszcisszájú pontjában az f függvény grafikus képeéhez húzott érintő egyenletét!

5p c) Igazold, hogy bármely a , $a \in (-1, 1)$ valós szám esetén az $f(x) = a$ egyenletnek egyetlen megoldása van.

2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(x-1)$ függvény.

5p a) Igazold, hogy $\int_0^2 f(x)e^{-x} dx = 0$.

-
- 5p** b) Igazold, hogy az f függvény grafikus képe, az Ox tengely, valamint az $x=1$ és az $x=2$ egyenletű egyenesek által határolt síkidom területe egyenlő e -vel!
- 5p** c) Bizonyítsd be, hogy $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-n}^1 (f(x) + e^x) dx = 0$.