2024. július 16., kedd

1. feladat Határozzuk meg az összes α valós számot, amelyre minden pozitív egész n esetén teljesül, hogy n osztja a következő egész számot:

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor.$$

(A $\lfloor z \rfloor$ a legnagyobb egész számot jelöli, amely kisebb vagy egyenlő, mint z. Például $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ és $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2{,}9 \rfloor = 2$.)

2. feladat Határozzuk meg az összes, pozitív egészekből álló (a, b) számpárt, melyre léteznek g és N pozitív egészek úgy, hogy

$$\operatorname{lnko}(a^n + b,\, b^n + a) = g$$

teljesül minden $n \geqslant N$ egészre. (Az x és y egész számok legnagyobb közös osztóját $\operatorname{lnko}(x, y)$ jelöli.)

3. feladat Legyen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ pozitív egészek egy végtelen sorozata, valamint legyen N egy pozitív egész. Tegyük fel, hogy minden $n > N$ esetén a_n megegyezik azzal a számmal, ahányszor a_{n-1} az $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ sorozatban szerepel.

Bizonyítsuk be, hogy $a_1, a_3, a_5, \ldots$ és $a_2, a_4, a_6, \ldots$ sorozatok valamelyike egy idő után periodikus.

(A $b_1, b_2, b_3, \ldots$ végtelen sorozat *egy idő után periodikus*, ha léteznek p és M pozitív egészek, melyekre $b_{m+p} = b_m$ minden $m \geqslant M$ esetén.)

Munkaidő: négy és fél óra.
Minden feladat helyes megoldásáért 7 pont adható.

2024. július 17., szerda

4. feladat Tegyük fel, hogy az ABC háromszögben $AB < AC < BC$. Jelölje ω az ABC háromszög beírt körét, I pedig ω középpontját. Legyen X a BC egyenes C-től különböző pontja úgy, hogy az X-en átmenő, AC-vel párhuzamos egyenes érinti ω-t. Továbbá legyen Y a BC egyenes B-től különböző pontja úgy, hogy az Y-on átmenő, AB-vel párhuzamos egyenes érinti ω-t. Messe az AI egyenes az ABC háromszög körülírt körét a $P \neq A$ pontban. Jelölje K és L az AC, illetve AB szakasz felezőpontját.

Bizonyítsuk be, hogy $KIL\sphericalangle + YPX\sphericalangle = 180°$.

5. feladat Turbó, a csiga a következő játékot játssza egy 2024 sorból és 2023 oszlopból álló táblán, melynek 2022 mezőjén egy-egy szörny rejtőzik. Kezdetben Turbó nem ismeri a szörnyek helyét, de tudja, hogy az első és utolsó sort leszámítva minden sorban pontosan egy, valamint minden oszlopban legfeljebb egy szörny található.

Turbó kísérleteket tesz arra, hogy eljusson az első sorból az utolsóba. Minden kísérlete során kiválasztja, hogy az első sor melyik mezőjéből indul, majd minden lépésében egy oldalszomszédos mezőre lép. (Visszatérhet olyan mezőre, melyen már járt.) Ha olyan mezőre lép, ahol szörny rejtőzik, akkor véget ér a kísérlete, visszakerül az első sorba, és új kísérletet kezd. A szörnyek nem változtatják a helyüket, és Turbó emlékszik, hogy az általa meglátogatott mezők közül melyeken volt szörny. Ha az utolsó sor bármelyik mezőjét eléri, akkor befejeződik a kísérlet, és a játék véget ér.

Határozzuk meg azt a minimális n értéket, melyre Turbónak létezik olyan stratégiája, amellyel a szörnyek elhelyezkedésétől függetlenül biztosan eléri az utolsó sort legfeljebb n kísérlettel.

6. feladat Jelölje $\mathbb{Q}$ a racionális számok halmazát. Egy $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ függvényt *pimasz*nak nevezünk, ha rendelkezik a következő tulajdonsággal: minden $x, y \in \mathbb{Q}$ esetén fennáll, hogy

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \qquad \text{vagy} \qquad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Mutassuk meg, hogy létezik c egész szám úgy, hogy minden f pimasz függvényre legfeljebb c különböző racionális szám áll elő $f(r) + f(-r)$ alakban, ahol r racionális szám; valamint határozzuk meg c legkisebb lehetséges értékét.

Munkaidő: négy és fél óra.
Minden feladat helyes megoldásáért 7 pont adható.